Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 9.12.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 9

Aufgabe 39 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine endliche Menge $B = \{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die aus den Spalten $a_1, \ldots, a_m$ gebildete Matrix $A = (a_1, \ldots, a_m)$ den Rang $\operatorname{rg}(A) = |B|$ hat, und genau dann linear abhängig, wenn $\operatorname{rg}(A) < |B|$.

(b) Ist $\{3X^2 - 2X, X^4 - X^3 + 3X, X^3 - X^2 + 2, X^4 + X^2 + 1\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ linear abhängig oder unabhängig?

(c) Ist $\{(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ linear abhängig oder unabhängig?

Aufgabe 40 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \Phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \Phi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ festgelegt ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 41 (6 Punkte)

(a) Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$.
Rechnen Sie ausführlich nach, daß $V = \operatorname{Kern}(\Phi) \oplus \operatorname{Bild}(\Phi)$.

(b) Sei $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und
$\Phi : \left\{ \begin{array}{ll} V \to & V \\ f \mapsto & \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right) \end{array} \right\}$.

(i) Zeigen Sie, daß $\Phi \circ \Phi = \Phi$ gilt, und bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\Phi)$ und $\operatorname{Bild}(\Phi)$.

(ii) Bestimmen Sie zu $f : x \mapsto e^x$ ein $g \in \operatorname{Kern}(\Phi)$ und ein $h \in \operatorname{Bild}(\Phi)$ mit $f = g + h$.

(c) Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V mit $U_1 \oplus U_2 = V$. Zeigen Sie, daß es eine lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ gibt mit $\operatorname{Kern}(\Phi) = U_1$, $\operatorname{Bild}(\Phi) = U_2$ und $\Phi \circ \Phi = \Phi$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 16.12.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.