Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 2.12.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 8

Aufgabe 34 (2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen V sind $\mathbb{R}$-Vektorräume? (Dabei seien die Addition und die Skalarmultiplikation wie üblich koordinaten- bzw. punktweise erklärt.)

(a) die Menge der Nullfolgen $V = \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \alpha_n \to 0 \text{ für } n \to \infty \right\}$,

(b) bei festem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(\alpha) = \beta \}$.

Aufgabe 35 (5 Punkte)

Sei $F := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller reellen Folgen und $B := \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \mid \exists \gamma \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| \leq \gamma \right\}$ die Menge der beschränkten reellen Folgen. Zeigen Sie:

(a) B ist ein Untervektorraum von F.

(b) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right\}$ ist ein bijektiver Vektorraumendomorphismus von F.

(c) $\Phi|_B$ ist ein injektiver, aber nicht surjektiver Vektorraumendomorphismus von B.

Aufgabe 36 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha \cdot \sin(x + \beta) \}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und bestimmen Sie eine Basis von V.

(b) Zeigen Sie, daß $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta x + \gamma) \}$ kein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 37 (3 Punkte)

Bei gegebener Menge M sei $V := \mathcal{P}(M)$, versehen mit der Addition $\triangle$ (wie in Aufgabe 19).

(a) Zeigen Sie, daß es genau eine Möglichkeit gibt, eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{F}_2 \times V \to V$ so zu definieren, daß V zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum wird.

(b) Bestimmen Sie für den Fall, daß M endlich ist, eine Basis des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums V.

Aufgabe 38 (2 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis des von den Polynomen $p_1(X) = 1 + X$, $p_2(X) = 1 - X$, $p_3(X) = 1 + X^2$, $p_4(X) = 1 - X^2$ erzeugten Unter-$\mathbb{R}$-Vektorraums von $\mathbb{R}[X]$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 9.12.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.