Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 25.11.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 7

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des reellen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
6\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 3\xi_3 & + & 4\xi_4 & + & 3\xi_5 & + & \alpha\xi_6 & = & 1 \\
2\xi_1 & & & + & \xi_3 & + & 2\xi_4 & & & + & \xi_6 & = & 0 \\
2\xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & + & \xi_4 & & & + & \xi_6 & = & 1 \\
-4\xi_1 & & & - & 2\xi_3 & - & 4\xi_4 & + & \alpha(\alpha+1)\xi_5 & - & 2\xi_6 & = & \alpha+1 \\
6\xi_1 & + & \xi_2 & + & 3\xi_3 & + & 5\xi_4 & & & + & (\alpha+3)\xi_6 & = & 1
\end{array}$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A,b)$ des Systems $Ax = b$ für folgende Werte von A und b:

(a) $A = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \in {\mathbb{F}_3}^{4\times 5}$, $b = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \in {\mathbb{F}_3}^{4}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$, $b = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4}$.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist, und berechnen Sie A^{-1}.

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{q\times n}$.
Zeigen Sie: Es gilt $\mathcal{L}(A,0) \supseteq \mathcal{L}(B,0)$ genau dann, wenn es eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{p\times q}$ mit $A = C\cdot B$ gibt.

Aufgabe 33 (2 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rg}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
(b) $\operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A^\top) = n$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 2.12.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.