Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 18.11.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 6

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom mit $\mathrm{Grad}\,(f) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$, so gibt es ein Polynom $g \in \mathbb{K}[X]$ mit $f(X) = (X - \alpha) \cdot g(X)$.
(b) f hat in $\mathbb{K}$ höchstens n Nullstellen, d.h. $\#\{\alpha \in \mathbb{K} \mid f(\alpha) = 0\} \le n$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimmen Sie

(a) für alle $\alpha, \varphi \in \mathbb{K}$ die Lösungsmenge der Gleichung $\alpha x = \varphi$,
(b) für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi \in \mathbb{K}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \varphi \quad , \\ \gamma x + \delta y &= \psi \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 27 (6 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen A jeweils die Treppenform T sowie eine invertierbare Matrix C mit $T = CA$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in {\mathbb{F}_3}^{4\times 5}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1+2\,\mathrm{i} & -2+3\,\mathrm{i} & 1 \\ -1 & 3-\mathrm{i} & -4 \\ 3-\mathrm{i} & 4 & 2\,\mathrm{i} \\ -2\,\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1-3\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$.

Aufgabe 28 (3 Punkte)

$\mathbb{K}$ sei ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $r = \mathrm{rg}\,(A)$. Zeigen Sie, daß es Matrizen $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gibt, so daß $CAD = \sum_{i=1}^{r} E_{ii}$ gilt, mit $E_{ii} \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 25.11.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.