Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 4.11.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Auf $C := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei durch $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ eine Verknüpfung definiert.

(a) Zeigen Sie: $(C, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Welche der folgenden Mengen M sind Untergruppen von C?

(i) $M = \{(x_1, x_2) \in C \mid x_1 = x_2\}$,

(ii) $M = \{(x_1, x_2) \in C \mid x_1 + x_2 \geq 0\}$,

(iii) $M = \{(x_1, x_2) \in C \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, 2x_1 + 3x_2 = 0\}$,

(iv) $M = \{(x_1, x_2) \in C \mid 2x_1 + 3x_2 = 1\}$.

Aufgabe 16 (2 Punkte)

Sei $(C, \oplus)$ wie in Aufgabe 15 definiert. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} C & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array} \right\}$ ein Homomorphismus von $(C, \oplus)$ nach $(\mathbb{R}, +)$ ist, und bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,(\pi)$ und $\mathrm{Bild}\,(\pi)$.

Aufgabe 17 (5 Punkte)

$G = \{p, q, r, s, t, u\}$ sei eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel (in Zeile x, Spalte y stehe xy):

	p	q	r	s	t	u
p	p	q	r	s	t	u
q	q	r	p	t	u	s
r	r	p	q	u	s	t
s	s	u	t	p	r	q
t	t	s	u	q	p	r
u	u	t	s	r	q	p

(a) Bestimmen Sie für alle $x \in G$ die von x erzeugte Untergruppe $\langle x \rangle$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.

(c) Welche der Untergruppen von G sind Normalteiler?

(d) Zeigen Sie, daß es keinen Isomorphismus von G nach Z_6 gibt.

(e) Bestimmen Sie einen Isomorphismus von G nach S_3.

Aufgabe 18 (3 Punkte)

Sei $C := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, versehen mit der Addition $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ aus Aufgabe 15 und der Multiplikation $(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Zeigen Sie, daß $(C, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Aufgabe 19 (2 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeigen Sie, daß $(\mathcal{P}(M), \triangle, \cap)$ (mit $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ wie in Aufgabe 5) ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 11.11.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.