Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 28.10.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 3

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. $|M| = \#(M)$ bezeichne die Mächtigkeit einer Menge M. Zeigen Sie

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

oder (was äquivalent ist, da die rechten Seiten gleich sind)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + - \cdots + \\ + (-1)^n \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}\right| + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $(i \in \{1, \ldots, 6\})$, gegeben durch

$$f_1(x) = x\,,\ f_2(x) = 1 - x\,,\ f_3(x) = \tfrac{1}{x}\,,\ f_4(x) = \tfrac{1}{1-x}\,,\ f_5(x) = \tfrac{x-1}{x}\,,\ f_6(x) = \tfrac{x}{x-1}\,,$$

bijektiv sind und die Menge $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Sei G eine Menge mit einer Verknüpfung, die den folgenden Bedingungen genüge:
(i) Es gibt ein $e \in G$ mit $\forall x \in G : ex = x$.
(ii) Für alle $x, y \in G$ gibt es genau ein $u \in G$ mit $ux = y$ und genau ein $v \in G$ mit $xv = y$.
(iii) Für alle $u, v \in G$ mit $uv = e$ gilt $\forall x, y \in G : (xu)(vy) = xy$.
Zeigen Sie, daß dann G eine Gruppe ist.
Hinweis: Sie kommen zum Ziel, wenn Sie nacheinander beweisen:
(a) $\forall x \in G : xe = x$.
(b) Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $x^{-1} \in G$ mit $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.
(c) $\forall x, y \in G : (xy)y^{-1} = x$.
(d) $\forall x, y, z \in G : x(yz) = (xy)z$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei G eine abelsche Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, daß für alle $x \in G$ gilt: $x^n \left[:= \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ Faktoren}}\right] = e$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 4.11.1991, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.