Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 3.2.1992

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 14

Aufgabe 61 (6 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}\,(V)$.
Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Φ ist diagonalisierbar (d.h. V ist direkte Summe der Eigenräume von Φ).
(b) Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von Φ besteht.
(c) Es gibt eine Basis B von V, so daß die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\Phi)$ von Φ bezüglich B Diagonalgestalt hat.
(d) Die Jordan-Normalform von Φ hat Diagonalgestalt.
(e) $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,(\Phi)} \dim E_\lambda(\Phi) = \dim V$.
(f) Das charakteristische Polynom $f_\Phi(T)$ von Φ hat die Gestalt $f_\Phi(T) = (T-\lambda_1)^{r_1} \cdots (T-\lambda_k)^{r_k}$ mit $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, und für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $\mathrm{rg}\,(\Phi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - r_i$.
(g) Das charakteristische Polynom $f_\Phi(T)$ von Φ hat die Gestalt $f_\Phi(T) = (T-\lambda_1)^{r_1} \cdots (T-\lambda_k)^{r_k}$ mit $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, und für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(\Phi)$ gilt $\dim E_\lambda(\Phi) = \dim H_\lambda(\Phi)$.
(h) Das Minimalpolynom $h_\Phi(T)$ von Φ hat die Gestalt $h_\Phi(T) = (T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_k)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 62 (4 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -2\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $f_A(T)$ und das Minimalpolynom $h_A(T)$.
(b) Zeigen Sie, daß A diagonalisierbar ist, und berechnen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 63 (6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Bestimmen Sie:

(a) die (reellen) Eigenwerte $\mathrm{Spec}\,(A) \subseteq \mathbb{R}$ und zu jedem $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A)$ den Eigenraum $E_\lambda(A)$ und den Hauptraum $H_\lambda(A)$,
(b) die Jordan-Normalform J von A,
(c) das Minimalpolynom von A,
(d) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $J = S^{-1}AS$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 10.2.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.