Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 27.1.1992

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 13

Aufgabe 57 (5 Punkte)

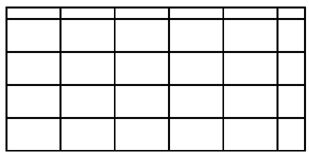
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten ein festes Vertretersystem $\mathbb{P}_{\mathbb{K}[T]}$ der *Primpolynome* (d.h. Primelemente von $\mathbb{K}[T]$), z.B. die Primpolynome, deren Leitkoeffizient $= 1$ ist. Ferner sei $f \in \mathbb{K}[T] \setminus \{0\}$ ein Polynom und $Q(f) := \prod\limits_{\substack{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}[T]} \\ p \mid f}} p$. Zeigen Sie:

(a) $Q(f)$ ist ein Teiler von f, und es gibt kein Polynom $g \in \mathbb{K}[T]$ mit $\deg(g) > 0$ und $g^2 \mid Q(f)$. (Deswegen heißt $Q(f)$ *quadratfreier Kern* von f.)

(b) Falls $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$, ist $Q(f) \approx \frac{f}{\mathrm{ggT}\,(f, f')}$, wobei f' die formale Ableitung von f bedeute.

Aufgabe 58 (4 Punkte)

Ein Student möchte sein rechteckiges Zimmer mit Teppichboden auskleiden und dazu lauter rechteckige Stücke desselben Formats und gleicher Ausrichtung verwenden:



Erst versucht er es mit 50 cm $\times$ 70 cm - Stücken, doch da bleiben an der Längsseite 10 cm und an der Schmalseite 40 cm Teppichboden übrig, in anderer Auslegerichtung gar an der Längsseite 60 cm und an der Schmalseite 20 cm. Viel besser kommt er mit quadratischen 30 cm $\times$ 30 cm - Stücken weg; da ergeben sich an Längs- und Schmalseite jeweils nur 10 cm Teppichboden als Abfall.
Welche Fläche hat das Zimmer?

Aufgabe 59 (4 Punkte)

Seien U und V Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums W.

(a) Zeigen Sie, daß die beiden Faktorräume ${}^{(U+V)}\!/_{V}$ und ${}^{U}\!/_{(U \cap V)}$ zueinander isomorph sind, und geben Sie einen Isomorphismus zwischen beiden an.

(b) Leiten Sie daraus für den Fall, daß U und V endlichdimensional sind, die bereits aus der Vorlesung bekannte Formel $\dim_{\mathbb{K}}(U+V) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap V)$ her.

Aufgabe 60 (3 Punkte)

V sei ein 5-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, und es sei $U = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ der von $a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_5$, $a_2 = b_2 + 2b_3 + b_4$, $a_3 = -b_1 + b_3 - 2b_5$ und $a_4 = b_4 + b_5$ erzeugte Unterraum.

(a) Bestimmen Sie eine Basis C des Faktorraums ${}^{V}\!/_{U}$.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{CB}(\Pi)$ der kanonischen Abbildung $\Pi : V \to {}^{V}\!/_{U}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 3.2.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.