Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 20.1.1992

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 12

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, Φ ein Endomorphismus von V und $x \in V$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $x, \Phi(x), \ldots, \Phi^{n-1}(x)$ linear unabhängig, aber $x, \Phi(x), \ldots, \Phi^n(x)$ linear abhängig sind.

(b) Sind $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_0 \cdot x + \lambda_1 \cdot \Phi(x) + \cdots + \lambda_n \cdot \Phi^n(x) = 0$ und $\lambda_n \neq 0$, so ist das Polynom $p(T) := \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T + \cdots + \lambda_n \cdot T^n$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $f_\Phi(T)$.

Aufgabe 54 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $Z_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

(a) Zeigen Sie, daß durch $f(\overline{x}) := \mathrm{ggT}\,(x, n)$ eine Funktion $f: Z_n \to \mathbb{N}$ definiert ist.

Sei $Z_n/_\sim$ die Partition bezüglich der auf Z_n definierten Äquivalenzrelation $\overline{x} \sim \overline{y} \;:\Leftrightarrow\; f(\overline{x}) = f(\overline{y})$.

(b) Geben Sie $Z_{12}/_\sim$ explizit an.

(c) Zeigen Sie, daß die auf Z_n definierte Äquivalenzrelation $\overline{x} \approx \overline{y} \;:\Leftrightarrow\; \langle \overline{x} \rangle = \langle \overline{y} \rangle$ dieselbe Partition von Z_n wie $\sim$ liefert.

Aufgabe 55 (5 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $M := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. In M sei durch $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{K} : x = \lambda y$ eine Relation $\sim$ definiert.

(a) Weisen Sie nach, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Nun sei $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := M/_\sim$ die Quotientenmenge und $p: M \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ die kanonische Abbildung.

(b) Zeigen Sie, daß $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & p((x_1, \ldots, x_n, 1)) \end{array} \right\}$ eine injektive Abbildung ist, und geben Sie für $n > 0$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus j(\mathbb{K}^n)$ und $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ an.

(c) Berechnen Sie $\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$, wobei q eine Primzahl sei.

(d) Zeigen Sie, daß jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$, aufgefaßt als Abbildung $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} M \to M \\ x \mapsto Ax \end{array} \right\}$, eine Abbildung $\overline{\Phi} : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ „induziert" (d.h. es soll $\overline{\Phi} \circ p = p \circ \Phi$ gelten).

Aufgabe 56 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie den ggT der Polynome $f(T) = T^7 - T^5 - T^3 - \overline{2}T$ und $g(T) = T^4 + \overline{1}$ im Polynomring $\mathbb{F}_5[T]$. Bestimmen Sie auch Polynome $u(T), v(T) \in \mathbb{F}_5[T]$, für die $u \cdot f + v \cdot g = \mathrm{ggT}\,(f, g)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Inverse 4321^{-1} von $4321 \in \mathbb{F}_{11113}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 27.1.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.