Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 13.1.1992

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 11

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix $A = \begin{pmatrix} 26\alpha - 19 & 6 & 26 & 52\alpha - 20 \\ -33\alpha + 12 & -5 & -33 & -66\alpha - 3 \\ 16\alpha - 9 & 3 & 15 & 32\alpha - 7 \\ -13\alpha + 9 & -3 & -13 & -26\alpha + 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Aufgabe 50 (5 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta \in \mathbb{K}$.
Bestimmen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom, die Adjunkte und, wenn existent, die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \beta + \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Aufgabe 51 (5 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) V sei ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und direkte Summe von n Unterräumen: $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, und zu jedem U_i sei ein Endomorphismus $\Phi_i \in \mathrm{End}\,(U_i)$ gegeben. Dann ist $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ u_1 + \cdots + u_n \text{ (mit jeweils } u_i \in U_i) & \mapsto & \Phi_1(u_1) + \cdots + \Phi_n(u_n) \end{array} \right\}$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, daß $\det(\Psi) = \det(\Phi_1) \cdot \ldots \cdot \det(\Phi_n)$.

(b) Seien $V = \mathbb{K}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{m\times m}$. Zeigen Sie, daß die Linksmultiplikation mit C, $\Phi : \left\{ \begin{array}{c} V \to V \\ A \mapsto CA \end{array} \right\}$, die Determinante $\det(\Phi) = \det(C)^n$ hat.
(Hinweis: Betrachten Sie allgemeiner bei gegebenen $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^{m\times m}$ die Determinante der Abbildung $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & (C_1 a_1, \dots, C_n a_n) \end{array} \right\}$, die in einer $m \times n$-Matrix jeweils die i-te Spalte von links mit C_i multipliziert.)

(c) Seien $V = \mathbb{K}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, daß die Rechtsmultiplikation mit C, $\Phi : \left\{ \begin{array}{c} V \to V \\ A \mapsto AC \end{array} \right\}$, die Determinante $\det(\Phi) = \det(C)^m$ hat.

(d) Seien $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ und $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, daß die Konjugation mit C, $\Phi : \left\{ \begin{array}{c} V \to V \\ A \mapsto CAC^{-1} \end{array} \right\}$, die Determinante $\det(\Phi) = 1$ hat.

Aufgabe 52 (2 Punkte)

Ist es möglich, a_1, a_2, a_3 so zu wählen, daß sowohl $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & a_1 \\ 2 & 1 & a_2 \\ 1 & 2 & a_3 \end{pmatrix}$ als auch A^{-1} in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ liegen?

Abgabe: Bis spätestens Montag, 20.1.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.