Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 20.12.1991

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 42 (7 Punkte)

Sei

(a) $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{C}$ und $\Phi : \left\{ \begin{matrix} V \to & V \\ f \mapsto & (x \mapsto x \cdot f'(x)) \end{matrix} \right\}$, bzw.

(b) $V = \mathbb{C}[X]$ und $\Phi : \left\{ \begin{matrix} V \to & V \\ f \mapsto & X \cdot f' \end{matrix} \right\}$ (wobei f' die formale Ableitung von f bezeichne).

Behandeln Sie in beiden Fällen:

(i) Zeigen Sie, daß Φ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum-Homomorphismus ist.
(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{Spec}(\Phi)$ und für jeden Eigenwert $\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi)$ den Eigenraum $E_\lambda(\Phi)$.
(iii) Ist $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi)} E_\lambda(\Phi) = V$?

Aufgabe 43 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Signum der Permutationen
$\sigma = (5, 9, 3, 6, 1, 8, 2, 10, 4, 7) \in S_{10}$ und $\tau = (n, n-1, \ldots, 2, 1) \in S_n$.

(b) Zeigen Sie: $\forall \sigma \in S_n : \operatorname{sign}(\sigma) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Aufgabe 44 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7{}^{4\times 4}$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \ldots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \ldots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$, für die die Matrix $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & \alpha & \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-\alpha & 1-\alpha & \alpha-\mathrm{i} \\ 1-\alpha & 1 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ invertierbar ist.

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Für $r \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $\#I = r$ und $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\#J = r$ heißt die Zahl $\det(A_{IJ})$ (d.h., wenn man $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ und $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ ausschreibt, die Zahl $\det(a_{i_k, j_l})_{\substack{k=1,\ldots,r \\ l=1,\ldots,r}}$) *r-reihiger Minor* von A. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rg}(A) \ge r \;\Leftrightarrow\; A$ hat einen r-reihiger Minor $\neq 0$,
(b) $\operatorname{rg}(A) = \max\{r \in \mathbb{N} \mid A$ hat einen r-reihiger Minor $\neq 0\}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 13.1.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.

Die folgenden Aufgaben stehen zur freiwilligen Bearbeitung frei. Wer sie bearbeitet, kann die angegebenen Punktezahlen erreichen; wer sie nicht bearbeitet, verliert aber nichts dadurch.

Aufgabe 46 (6 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $A^{\#}$ die Adjunkte von A. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rg}\left(A^{\#}\right) = \left\{\begin{array}{ll} n & \text{falls } \operatorname{rg}(A) = n \\ 1 & \text{falls } \operatorname{rg}(A) = n-1 > 0 \\ 0 & \text{falls } \operatorname{rg}(A) \le \max(n-2,0) \end{array}\right\}$,

(b) $\det\left(A^{\#}\right) = (\det A)^{n-1}$,

(c) $\left(A^{\#}\right)^{\#} = (\det A)^{n-2}\cdot A$, außer wenn $n=1$ und $A = (0)$.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in S_n$ sei $l(\sigma)$ das n-Tupel $(l_1(\sigma),\dots,l_n(\sigma))$, wobei $l_i(\sigma) := \#\{j \in \{1,\dots,n\} \mid j > i, \sigma(j) < \sigma(i)\}$. $l(\sigma)$ heißt *Lehmer-Code* von σ.

(a) Bestimmen Sie den Lehmer-Code von $\sigma = (1\ 2\ 4\ 6\ 5\ 3) \in S_6$.

(b) Wie kann man bei gegebenem $l(\sigma)$ wieder auf σ zurückschließen? Zeigen Sie, daß l eine Bijektion $l:\ S_n \to \{0,\dots,n-1\}\times\{0,\dots,n-2\}\times\cdots\times\{0,1\}\times\{0\}$ ist.

(c) Sei $\tau = (k\ \ k+1)$ eine Transposition Benachbarter. Zeigen Sie, daß $l(\sigma\circ\tau)$ aus $l(\sigma)$ folgendermaßen hervorgeht:
$$l(\sigma\circ\tau) = \left\{\begin{array}{ll} (l_1(\sigma),\dots,l_{k-1}(\sigma),l_{k+1}(\sigma)+1,l_k(\sigma),l_{k+2}(\sigma),\dots,l_n(\sigma)) & \text{falls } \sigma(k) < \sigma(k+1) \\ (l_1(\sigma),\dots,l_{k-1}(\sigma),l_{k+1}(\sigma),l_k(\sigma)-1,l_{k+2}(\sigma),\dots,l_n(\sigma)) & \text{falls } \sigma(k) > \sigma(k+1) \end{array}\right\}.$$

(d) Zeigen Sie, daß die *Fehlstandszahl* $f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} l_i(\sigma)$ sich beim Übergang von σ zu $\sigma\circ\tau$ um genau 1 ändert.

(e) Zeigen Sie, daß $f(\sigma)$ die kleinstmögliche Anzahl von Faktoren ist, die auftreten, wenn man σ als Produkt von Transpositionen Benachbarter darstellt.

(f) Für welches $\sigma \in S_n$ wird $f(\sigma)$ maximal?

(g) Zeigen Sie, daß $d(\sigma,\tau) := f\left(\sigma^{-1}\circ\tau\right)$ $(\sigma,\tau \in S_n)$ folgende Eigenschaften hat:

(i) $d(\sigma,\tau) \ge 0$,

(ii) $d(\sigma,\tau) = 0 \iff \sigma = \tau$,

(iii) $d(\sigma,\tau) = d(\tau,\sigma)$,

(iv) $d(\sigma,\tau) \le d(\sigma,\rho) + d(\rho,\tau)$.

So eine Funktion heißt *Abstandsfunktion*.

Aufgabe 48 (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $s_m := \sum_{k=0}^{n} {x_k}^m$ ihre *m-te Potenzsumme*. Zeigen Sie:
$$\det\,(s_{i+j})_{\substack{i=0,\dots,n\\ j=0,\dots,n}} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i)^2.$$

Freiwillige Abgabe: Bis Montag, 13.1.1992, 13.30 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.