Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 26.6.1992

Funktionentheorie I
Übungsblatt 9

Aufgabe 34 (5 Punkte)
Es sei G ein Gebiet. Zeigen Sie, daß jede der nachfolgenden Bedingungen die nächste impliziert: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f).

(a) Es gibt einen Homömorphismus $f : \mathbb{D} \to G$.
(b) $\pi_1(G, z) = \{0\}$ für alle $z \in G$.
(c) Für alle geschlossenen Wege γ in G und alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt $n(\gamma, z) = 0$.
(d) Für alle geschlossenen Wege γ in G und alle in G holomorphen Funktionen f gilt $\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 0$.
(e) Jede in G holomorphe Funktion f hat eine in G holomorphe Stammfunktion.
(f) Jede in G holomorphe und nullstellenfreie Funktion f besitzt einen in G holomorphen Logarithmus.

Zitieren Sie bitte genau, welche Sätze Sie benutzen!

Aufgabe 35 (3 Punkte)
Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit $x < y$ und für $r > 0$ sei γ der (positive durchlaufene) Rand des Rechtecks $\{z \in \mathbb{C} : x \leq \operatorname{Re} z \leq y, |\operatorname{Im} z| \leq r\}$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{dz}{\sin \pi z}$.

Aufgabe 36 (3 Punkte)
Bestimmen Sie das Holomorphiegebiet der folgenden Funktionen, und geben Sie an, von welcher Art die auftretenden Singularitäten sind:

(a) $\dfrac{1}{1 - e^z} + \dfrac{2z}{z^2 + 4\pi^2}$,
(b) $\sin \frac{1}{z}$,
(c) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Aufgabe 37 (3 Punkte)
Sei $f(z) = e^{1/z} + \frac{1}{z+1}$. Bestimmen Sie die Art der Singularitäten von f, und berechnen Sie für $n \in \mathbb{Z}$ und $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial K_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

Aufgabe 38 (3 Punkte)
Zeigen Sie: Ist f eine nichtkonstante rationale Funktion, so ist e^f keine rationale Funktion.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 3.7.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.

Hinweis: Bei diesem Übungsblatt können pro Abgabe nur maximal drei der fünf Aufgaben korrigiert und gewertet werden.