Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 12.6.1992

Funktionentheorie I

Übungsblatt 7

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Es sei $\mathbb{D}$ der Einheitskreis und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und $|f'(0)| \le 1$.

(b) Ist $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat f die Gestalt $f(z) = c \cdot z$ mit einem $c \in S^1$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß auf $G = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ x \in \mathbb{R} : k\pi \le x \le \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}$ eine holomorphe Funktion $\log \tan z$ (d.i. ein holomorphes f mit $\exp(f(z)) = \tan z$) erklärt werden kann.
(Hinweis: Schreiben Sie $\tan z$ als $-\mathrm{i} \cdot \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z} - 1}{e^{2\,\mathrm{i}\,z} + 1}$.)

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \times \operatorname{Tr}\gamma \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für jedes feste $\zeta \in \operatorname{Tr}\gamma$ sei $f(z, \zeta)$ (als Funktion von z) in U holomorph. Zeigen Sie, daß die Funktion $F(z) = \int_\gamma f(z, \zeta)\, d\zeta$ in U holomorph ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini.)

Aufgabe 29 (5 Punkte)

Beweisen Sie für $s \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sin x \, dx = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty x^{s-1} \cos x \, dx = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

Integrieren Sie dazu die Funktion $f(z) = z^{s-1} e^{\mathrm{i}\,z} = e^{(s-1)\log z} e^{\mathrm{i}\,z}$ über den Rand des Viertelskreisrings $\{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ bzw. des Viertelskreisrings $\{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 0\}$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 19.6.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.

Hinweis: Wegen mangelnder Korrekturkapazitäten können auch bei diesem Übungsblatt pro Abgabe nur maximal zwei Aufgaben korrigiert und gewertet werden. Es ist also zwecklos, mehr als zwei Aufgaben abzugeben. Die Maximalpunktzahl für dieses Übungsblatt beträgt 9 Punkte. Die geänderte Punkteskala wird bei der Scheinvergabe entsprechend berücksichtigt werden.