Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 5.6.1992

Funktionentheorie I
Übungsblatt 6

Aufgabe 22 (3 Punkte)
Es seien f und g zwei ganze Funktionen, und es gebe eine Konstante $K \geq 0$ mit $|f(z)| \leq K \cdot |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = C \cdot g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Sei f ein Polynom vom Grad n, und für $|z| < 1$ gelte $|f(z)| \leq M$.
Zeigen Sie, daß für $|z| \geq 1$ gilt $|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

(a) Seien f_m $(m \in \mathbb{N})$ holomorph in einer offenen Menge U, und $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ sei in U lokal gleichmäßig konvergent. Zeigen Sie, daß man die Potenzreihenentwicklungen von f um jedes $z_0 \in U$ gliedweise berechnen kann:
Ist $f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(z - z_0)^n$, so ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) (z - z_0)^n$.

(b) Zeigen Sie, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{2^n - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - 2^{-n}}$ für $|z| < 1$.

Aufgabe 25 (5 Punkte)
Es sei $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$ (was aufzufassen ist als $\lim\limits_{\substack{0<r<R \\ r\to 0 \\ R\to\infty}} \int_r^R e^{-t} t^{z-1}\, dt$).
Zeigen Sie, daß für $\operatorname{Re} z > 0$ das Integral konvergiert, $\Gamma(z)$ holomorph ist und die Ableitungen gegeben sind durch $\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{z-1}\, dt$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 12.6.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.

Hinweis: Wegen mangelnder Korrekturkapazitäten können ab diesem Übungsblatt pro Abgabe nur maximal zwei Aufgaben korrigiert und gewertet werden. Es ist also zwecklos, mehr als zwei Aufgaben abzugeben. Die Maximalpunktzahl für dieses Übungsblatt beträgt 9 Punkte. Die geänderte Punkteskala wird bei der Scheinvergabe entsprechend berücksichtigt werden.