Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 29.5.1992

Funktionentheorie I

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (3 Punkte)

Für $a > 0$ sei γ der (in positivem Sinn durchlaufene) Rand des Kreises $K_{2a}(0)$. Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + a^2}\,dz$,

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz$.

Aufgabe 18 (3 Punkte)

Sei f holomorph auf einem Gebiet G, $f \neq 0$. Zeigen Sie, daß für alle $z_0 \in G$ der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f'(z)\cdot(z-z_0)}{f(z)}$ existiert und eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Für eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f und $r \geq 0$ sei $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Zeigen Sie:

(a) $M(r,f)$ ist als Funktion von r stetig.
(b) $M(r,f)$ ist als Funktion von r monoton wachsend.
(c) Für $0 \leq r < R$ gilt für die n-te Ableitung: $M\big(r, f^{(n)}\big) \leq n! \cdot \frac{R}{(R-r)^{n+1}} \cdot M(R,f)$.

Aufgabe 20 (2 Punkte)

Gibt es eine in der Umgebung des Nullpunktes holomorphe Funktion f mit

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$ für alle n, bzw.

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ für alle n?

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Es sei f eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Zu jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ von f um den Punkt z_0 einen Koeffizienten a_n, der $= 0$ ist. Zeigen Sie, daß f dann ein Polynom ist.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 5.6.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.