Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 22.5.1992

Funktionentheorie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 14 (5=2+3 Punkte)

(a) Es sei γ der in positivem Sinn durchlaufene Rand des Halbrings $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$.
Berechnen Sie $\int\limits_\gamma \frac{\overline{z}}{z}\, dz$.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_\gamma (\operatorname{Im} z)\, dz$ für

(i) den Weg $\gamma(t) = t + \mathrm{i}\, t^\alpha$ $(t \in [0,1])$ in Abhängigkeit von $\alpha > 0$,
(ii) den Streckenzug von 0 über 1 nach $1 + \mathrm{i}$,
(iii) den Streckenzug von 0 über i nach $1 + \mathrm{i}$.

Aufgabe 15 (6=2+2+2 Punkte)

(a) Seien X ein metrischer Raum, I eine nichtleere Indexmenge, und zu jedem $i \in I$ eine zusammenhängende Menge $M_i \subset X$ gegeben. Ferner sei $\bigcap\limits_{i \in I} M_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, daß $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ zusammenhängend ist.

(b) Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, daß der Abschluß $\overline{M}$ (d.i. die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält) ebenfalls zusammenhängend ist.

(c) Es sei $E = \{\exp((1 + \mathrm{i})t) + \exp(\mathrm{i}\, t) : t \in \mathbb{R}\}$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Skizzieren Sie E, und zeigen Sie, daß $E \cup S^1$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 16 (5 Punkte)

Integrieren Sie $f(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}\, z)}{z}$ über den Rand des Halbringes $\{z \in \mathbb{C} : 0 < r \leq |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ und folgern Sie durch geeigneten Grenzübergang

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(Hinweise: Finden Sie ein den Halbring enthaltendes sternförmiges Gebiet, auf dem f holomorph ist. Schreiben Sie f als $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$, wobei g eine um 0 in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion ist.)

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 29.5.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.