Universität Karlsruhe (TH) Karlsruhe, 8.5.1992
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Funktionentheorie I

Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Es seien $F, G \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ formale Potenzreihen. Zeigen Sie:
 (i) $(F+G)' = F' + G'$,
 (ii) $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

(b) Für eine formale Potenzreihe $F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ sei $\exp(F) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n$. Zeigen Sie:
 (i) Das ist eine wohldefinierte formale Potenzreihe.
 (ii) $G = \exp(F)$ ist das einzige $G \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ der Form $G = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^n$ mit $G' = F' \cdot G$.
 (iii) Es gibt genau ein F mit $\exp(F) = 1 + T$. Bestimmen Sie dieses F.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n, f : U \to \mathbb{C}$ Funktionen. Zeigen Sie, daß die folgenden Definitionen für „$f_n \to f$ lokal gleichmäßig" äquivalent sind:

(i) Zu jedem $z \in U$ gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von z, so daß $f_n \to f$ gleichmäßig auf V.
(ii) Zu jedem $z \in U$ gibt es ein $r > 0$, so daß $f_n \to f$ gleichmäßig auf $K_r(z)$.
(iii) Für jede kompakte Menge $K \subset U$ strebt $f_n \to f$ gleichmäßig auf K.
(iv) Es gibt eine Funktion $N : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{N}$, so daß für alle $R > 0$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$ und für alle $n > N(R, r, \varepsilon)$ und alle $z \in K_R(0)$ mit $K_r(z) \subset U$ gilt $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Bestimmen Sie Potenzreihen $c(z), s(z) \in \mathbb{C}\langle z \rangle$ mit der Eigenschaft, daß für alle reellen z im jeweiligen Konvergenzbereich gilt $c(z) = \cos z$ und $s(z) = \sin z$. Bestimmen Sie ferner den Konvergenzbereich von c und s, und zeigen Sie, daß im gemeinsamen Konvergenzbereich gilt $c(z) + \mathrm{i}\, s(z) = \exp(\mathrm{i}\, z)$ und $c(z)^2 + s(z)^2 = 1$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien $f_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} z^m$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ Potenzreihen in $\mathbb{C}\langle z \rangle$ mit Konvergenzradius $\rho_n = r(f_n)$ bzw. $\rho = r(f)$, und f_n strebe koeffizientenweise gegen f (d.h. $\lim_{n \to \infty} a_{nm} = a_m$ für alle m).

(a) Zeigen Sie unter der zusätzlichen Voraussetzung $|a_{nm}| \le \frac{\gamma}{\delta^m}$ mit $\gamma > 0$, $\delta > 0$ (so daß $\rho_n \ge \delta$):
 (i) $f_n(z) \to f(z)$ lokal gleichmäßig in $K_\delta(0)$.
 (ii) Für jede Folge (z_n) mit $|z_n| < \rho_n$ und $z_n \to 0$ gilt $\lim_{n \to \infty} f_n(z_n) = f(0)$.

(b) Finden Sie solche f_n und eine Folge (z_n) mit $|z_n| < \rho_n$ und $z_n \to 0$, so daß $\lim_{n \to \infty} f_n(z_n)$ existiert, aber $\neq f(0)$ ist.
(Hinweis: Wählen Sie z.B. $f_n(z) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{1}{1 - nz}$.)

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 15.5.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.