Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. F. Herrlich

Karlsruhe, 3.7.1992

Funktionentheorie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f auf G meromorph. Zeigen Sie, daß f genau dann ein auf G meromorphes Exponentialintegral (d.i. ein g mit $f = \frac{g'}{g}$; man wünscht sich $g = \exp\left(\int f\right)$) besitzt, wenn alle Pole von f von erster Ordnung und alle Residuen von f ganzzahlig sind.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $J_n(z)$ der Koeffizient von w^n in der Laurent-Enwicklung der Funktion $\exp\left(\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right)$. Zeigen Sie:

(a) $J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\left(z \cdot \sin t - n \cdot t\right) dt$,

(b) J_n ist eine ganze Funktion,

(c) J_n genügt der Differentialgleichung $z^2 \cdot y'' + z \cdot y' + \left(z^2 - n^2\right) \cdot y = 0$.

Aufgabe 41 (3 Punkte)

Zeigen Sie für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int\limits_0^\pi \frac{\cos nx}{1 - 2a\cos x + a^2}\, dx = \frac{\pi a^{|n|}}{1 - a^2}$$

Aufgabe 42 (5 Punkte)

(a) Es sei R eine rationale Funktion ohne Pole in $\mathbb{Z}$ mit $\lim\limits_{z \to \infty} zR(z) = 0$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) = -\sum_{a \in \mathbb{C}} \pi\cot \pi a \cdot \operatorname{res}_a\left(R(z)\right)$$

(Hinweis: Integration von $R(z) \cdot \pi\cot \pi z$ über den Rand des Quadrats $\left\{z \in \mathbb{C} : \max\left(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\right) \leq n + \frac{1}{2}\right\}$.)

(b) Finden Sie geschlossene Formeln für $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, 13.7.1992, 13.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.

Hinweis: Bei diesem Übungsblatt können wieder alle vier Aufgaben bearbeitet werden!