Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. H.-W. Leopoldt

Karlsruhe, 19.5.1990

Elementare Zahlentheorie — Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (3=1+2 Punkte)
Tripel (x,y,z) ganzer Zahlen mit $x^2+y^2=z^2$, $z>0$, $\mathrm{ggT}(x,y,z)=1$ nennt man *Pythagoräische Tripel.*

(a) Zeigen Sie: Durch $(x,y,z)\mapsto \frac{x}{z}+i\cdot\frac{y}{z}$ erhält man eine Bijektion dieser Tripel auf die Punkte des Einheitskreisrandes mit rationalen Koordinaten.
(b) Charakterisieren Sie diese Punkte: Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Punkte an, die bijektiv ist. (Hinweis: Bedingungen an die Primzerlegung von $x+iy$ in $\Gamma=\mathbb{Z}[i]$.)

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungern der Gleichung $x^2+2=y^3$ in ganzen Zahlen x,y.
(Hinweis: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist euklidisch.)

Aufgabe 15 (4=0+0+2+1+1 Punkte)
Die *Teilersumme* $\sigma(n)=\sum_{d\mid n} d$ einer natürlichen Zahl n mit der Primfaktorzerlegung $n=p_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\nu_r}$ ist $\sigma(n)=\frac{p_1^{\nu_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_r^{\nu_r+1}-1}{p_r-1}$.

Aus der Vorlesung bekannt sind:
(a) Ist $n=2^{\nu-1}(2^\nu-1)$ mit $2^\nu-1\in\mathbb{P}$, so ist n vollkommen, d.h. $\sigma(n)=2n$. (Euklid, Buch IX)
(b) Ist n vollkommen und gerade, so hat n die Form $n=2^{\nu-1}(2^\nu-1)$ mit $2^\nu-1\in\mathbb{P}$. (Euler)

Zeigen Sie:
(c) Ist n vollkommen und ungerade, so hat n die Form $n=p^{4s+1}\cdot m^2$ mit $p\in\mathbb{P}$, $p=4k+1$, $m\in\mathbb{N}$, $p\nmid m$.
(d) Ist n ungerade mit genau zwei verschiedenen Primteilern, so ist n defizient, d.h. $\sigma(n)<2n$.
(e) $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n}=+\infty$.

Aufgabe 16 (7=1+1+1+1+1+1+1 Punkte)
Hier sei φ die *Eulersche φ-Funktion.*
Bestimmen Sie
(a) $\{n\in\mathbb{N}:\varphi(n)=12\}$,
(b) $\{n\in\mathbb{N}:\varphi(n)=\frac{n}{2}\}$,
(c) $\{n\in\mathbb{N}:\varphi(n)=\varphi(2n)\}$.

Zeigen Sie für $m,n\in\mathbb{N}$:
(d) $\varphi(nm)=n\cdot\varphi(m)$, falls jeder Primteiler von n auch Teiler von m ist.
(e) $\varphi(m)\cdot\varphi(n)=\varphi((m,n))\cdot\varphi([m,n])$.
(f) $\varphi(mn)\cdot\varphi((m,n))=(m,n)\cdot\varphi(m)\cdot\varphi(n)$.
(g) Für $n>1$ gilt $\sum_{\substack{1\le k\le n\\ (k,n)=1}} k=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\varphi(n)$.

Aufgabe 17 (5 Punkte)
Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler (in $\mathbb{N}$) von n. Zeigen Sie:

$$|\{x\in\mathbb{N}:\tau(x\cdot n)=n\}|=\begin{cases}1 & \text{für } n=4\\ t! & \text{für } n=p_1\cdots p_t \text{ mit paarweise verschiedenen } p_i\in\mathbb{P}\\ \infty & \text{sonst}\end{cases}$$

Aufgabe 18 (3 Punkte)
Zeigen Sie: Für $n\in\mathbb{N}$ ist $\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\cdot\left[\frac{n}{d}\right]=1$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 25.5.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Vorlesung im Hörsaal Hauptbau.