Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. H.-W. Leopoldt

Karlsruhe, 11.5.1990

Elementare Zahlentheorie — Übungsblatt 3

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $p = 4k + 1$.

Aufgabe 9 (6=3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß für alle $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = \pm 1$ gilt

$$(ax + by, cx + dy) = (x, y)$$

(b) Zeigen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$:

$$(ac, bd) = (a, b) \cdot (c, d) \cdot \left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{d}{(c,d)}\right) \cdot \left(\frac{b}{(a,b)}, \frac{c}{(c,d)}\right)$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen von $xy + yz + zx = 0$ in ganzen Zahlen x, y, z.

Aufgabe 11 (6=1+1+2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den ggT von $125 + 95i$ und $116i$ in $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$.
(b) Bestimmen Sie den ggT von $T^4 - 5T^2 + 4$ und $T^2 - 5T + 6$ in $\Gamma = \mathbb{Q}[T]$.
(c) Zeigen Sie, daß $T^2 + 7T + 4$ ein Primelement in $\Gamma = \mathbb{Q}[T]$ ist.
(d) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt in $\mathbb{Q}[T]$: $(T^m - 1, T^n - 1) = T^{(m,n)} - 1$.

Aufgabe 12 (6 Punkte)
Es seien $\theta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ und $\Gamma = \{a + b\theta : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie:
Γ ist ein Ring genau dann, wenn θ von der Form $\theta = u + v \cdot \omega$ ist, $u, v \in \mathbb{Z}$ und ($\omega = \sqrt{d}$ mit $d \in \mathbb{Z}$) oder ($\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ mit $d \in \mathbb{Z}$, $d = 4k + 1$).
(b) Zeigen Sie, daß für $\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ Γ ein euklidischer Ring ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $\{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 : N(a + b\theta) < 1\}$.)

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, 17.5.1990, 15.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Hörsaal Hauptbau.