Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. H.-W. Leopoldt

Karlsruhe, 13.7.1990

Elementare Zahlentheorie — Übungsblatt 12

Aufgabe 57 (3 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl. Für $\alpha, \beta \in \{+1, -1\}$ sei $N(\alpha,\beta)$ die Anzahl der $x \in \mathbb{F}_p$ mit $\left(\frac{x}{p}\right) = \alpha$ und $\left(\frac{x+1}{p}\right) = \beta$.

Zeigen Sie, daß $4 \cdot N(\alpha,\beta) = \sum_{x=1}^{p-2} \left(1 + \alpha\left(\frac{x}{p}\right)\right) \cdot \left(1 + \beta\left(\frac{x+1}{p}\right)\right) = p - 2 - \beta - \alpha\beta - \alpha \cdot \left(\frac{-1}{p}\right)$.

Aufgabe 58 (7 Punkte)

Für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $G(k,m) = \sum_{a=0}^{m-1} {\zeta_m}^{ka^2}$ mit $\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ zu berechnen. Zeigen Sie:

(a) Für $d \in \mathbb{N}$, $d \,|\, (k,m)$ gilt $G(k,m) = d \cdot G\left(\frac{k}{d}, \frac{m}{d}\right)$. Man kann sich also auf teilerfremde k, m beschränken.

(b) Für $(m_1, m_2) = 1$ gilt $G(k, m_1 m_2) = G(km_2, m_1) \cdot G(km_1, m_2)$. Man kann sich also auf Primzahlpotenzen m beschränken.

(c) Sei $m = p^s$ mit $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$ und $p \nmid k$.
Dann ist $G(k,p^s) = p \cdot G(k, p^{s-2})$ für $s \geq 2$, $G(k,p) = \psi(k) \cdot \tau(\psi)$ für $s = 1$
und somit $G(k,p^s) = \left\{\begin{array}{ll} p^{\frac{s}{2}} & \text{für } s \equiv 0 \pmod 2 \\ p^{\frac{s-1}{2}} \cdot \psi(k) \cdot \tau(\psi) & \text{für } s \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right\}$.
Dabei sei ψ das Legendre-Symbol mod p ($\psi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$).

(d) Sei $m = 2^s$ und $2 \nmid k$. Dann ist $G(k, 2^s) = 2 \cdot G(k, 2^{s-2})$ für $s \geq 4$, $G(k,8) = 4 \cdot {\zeta_8}^k$ für $s = 3$, $G(k,4) = 2 \cdot \left(1 + {\zeta_4}^k\right)$ für $s = 2$, $G(k,2) = 0$ für $s = 1$
und somit $G(k,p^s) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{für } s = 0 \\ 0 & \text{für } s = 1 \\ 2^{\frac{s}{2}} \cdot \left(1 + {\zeta_4}^k\right) & \text{für } s \equiv 0 \pmod 2,\ s \geq 2 \\ 2^{\frac{s+1}{2}} \cdot {\zeta_8}^k & \text{für } s \equiv 1 \pmod 2,\ s \geq 2 \end{array}\right\}$.

Aufgabe 59 (5 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl und J wie in Aufgabe 54 definiert. Es bezeichne χ einen eigentlichen Restklassencharakter mod p und $\psi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ das Legendre-Symbol mod p. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{a \in \mathbb{F}_p} \chi(1 - a^2) = J(\chi, \psi)$.

(b) Für $k \in {\mathbb{F}_p}^\times$: $\sum_{a \in \mathbb{F}_p} \chi\left(a(k-a)\right) = \chi\left((k/2)^2\right) \cdot J(\chi,\psi)$.

(c) Für $\chi^2 \neq \varepsilon$ gilt $\tau(\chi)^2 = \tau(\chi^2) \cdot \chi(2)^{-2} \cdot J(\chi,\psi)$ und $J(\chi,\chi) = \chi(2)^{-2} \cdot J(\chi,\psi)$.

Aufgabe 60 (4 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Hat $x^n \equiv a \pmod p$ keine Lösung, so gibt es einen Restklassencharakter $\chi \bmod p$ mit $\chi^n = \varepsilon$ und $\chi(a) \neq 1$.

(b) Für die Anzahl $N(n,a,p)$ der Lösungen in $\mathbb{F}_p$ der Kongruenz $x^n \equiv a \pmod p$ gilt
$N(n,a,p) = \sum_{\substack{\chi \in \mathcal{X}_p \\ \chi^d = \varepsilon}} \chi(a)$, wobei $d = (n, p-1)$ sei.

Aufgabe 61 (6 Punkte)

Hier geht es um die schnelle Berechnung von Summen der Form $\overset{b}{\underset{a}{S}}(p,q) := \sum_{x=a+1}^{b} \left\lfloor \frac{px}{q} \right\rfloor$, wobei $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \leq b$.

Zeigen Sie:

(a) $\overset{b}{\underset{a}{S}}(p,q) = \overset{b}{\underset{a}{S}}(p-q,q) + \dfrac{(b^2+b)-(a^2+a)}{2}$.

(b) $\overset{b}{\underset{a}{S}}(p,q) = \left(b \cdot \left\lfloor \frac{p}{q} b \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{q} \right\rfloor\right) - \left(a \cdot \left\lfloor \frac{p}{q} a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{q} \right\rfloor\right) - \overset{\lfloor \frac{p}{q} b \rfloor}{\underset{\lfloor \frac{p}{q} a \rfloor}{S}}(q,p)$

(c) Berechnen Sie $\sum_{x=101}^{1000} \left\lfloor \frac{107}{52} \cdot x \right\rfloor$.

(d) Wie berechnen Sie $\sum_{x=1}^{1000} \left\lfloor \sqrt{2} \cdot x \right\rfloor$?

Aufgabe 62 (3 Punkte)

Zeigen Sie $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$.
(Hinweis: $\tau(\chi)$ für $\chi(a) = \left(\frac{a}{11}\right)$.)

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 20.7.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Vorlesung im Hörsaal Hauptbau.