Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. H.-W. Leopoldt

Karlsruhe, 6.7.1990

Elementare Zahlentheorie — Übungsblatt 11

Aufgabe 52 (3 Punkte)

Sei χ ein eigentlicher Restklassencharakter mit Führer f und $\tau(\chi) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}f)^\times} \chi(a) \cdot {\zeta_f}^a$ seine Gaußsche Summe. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\tau(\chi)} = \chi(-1) \cdot \tau(\overline{\chi})$,

(b) $|\tau(\chi)| = \sqrt{f}$.

Aufgabe 53 (5 Punkte)

Sei χ ein eigentlicher Restklassencharakter mit Führer f, $\chi \neq \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie:

$$L(1,\chi) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\tau(\chi)}{f} \cdot \sum\limits_{\substack{a \in \{1,\dots,f-1\} \\ (a,f)=1}} \overline{\chi}(a) \log\left(2 \sin \frac{\pi a}{f}\right) & \text{für } \chi(-1) = +1 \\ \frac{\tau(\chi)}{f} \cdot \sum\limits_{\substack{a \in \{1,\dots,f-1\} \\ (a,f)=1}} \overline{\chi}(a) \cdot \frac{\pi i a}{f} & \text{für } \chi(-1) = -1 \end{array} \right\}$$

(b) Berechnen Sie die $L(1,\chi)$ von allen Restklassencharakteren χ mit Führer $f \leq 6$ möglichst explizit.

Aufgabe 54 (5 Punkte)

Für zwei Restklassencharaktere $\chi, \psi \bmod p$ $(p \in \mathbb{P})$ heißt
$J(\chi,\psi) = \sum\limits_{\substack{a,b \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \\ a+b \equiv 1 \bmod p}} \chi(a) \cdot \psi(b)$ *Jacobische Summe.*

Zeigen Sie:

(a) $$J(\chi,\psi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } \chi = \varepsilon,\, \psi = \varepsilon \\ 0 & \text{für } \chi = \varepsilon,\, \psi \neq \varepsilon \\ 0 & \text{für } \chi \neq \varepsilon,\, \psi = \varepsilon \\ -\chi(-1) & \text{für } \chi \neq \varepsilon,\, \psi \neq \varepsilon,\, \chi\psi = \varepsilon \\ \frac{\tau(\chi)\tau(\psi)}{\tau(\chi\psi)} & \text{für } \chi \neq \varepsilon,\, \psi \neq \varepsilon,\, \chi\psi \neq \varepsilon \end{array} \right\}$$

(b) $|J(\chi,\psi)| \in \{0, 1, \sqrt{p}\}$.

Aufgabe 55 (3 Punkte)

Sei $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichletreihe. Zeigen Sie:

(a) Ist die Reihe $f(s)$ an einem Punkt $s = s_0$ konvergent, so ist sie für $s > s_0 + 1$ absolut konvergent.

(b) Ist die Reihe $f(s)$ an einem Punkt $s = s_0$ absolut konvergent, so ist sie für $s > s_0$ ebenfalls absolut konvergent.

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Zeigen Sie den „Identitätssatz für Dirichletreihen“:

Stimmen zwei Dirichletreihen $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ und $g(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ für alle $s > s_0$ ($s_0 \in \mathbb{R}$ fest) überein, so gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, 12.7.1990, 15.30 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Hörsaal Hauptbau.