Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 28.6.1991

Algebra II — Übungsblatt 8

Aufgabe 35

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $R = k[X,Y]$. Zeigen Sie:

(a) Sind $f, g \in R \setminus \{0\}$ teilerfremde Polynome, so ist $\mathrm{Var}(\langle f, g \rangle)$ eine endliche Menge.

(b) R hat genau die folgenden Primideale:

  (i) $\mathbf{p} = R$,
  (ii) $\mathbf{p} = \langle X - \alpha, Y - \beta \rangle$ mit $\alpha, \beta \in k$,
  (iii) $\mathbf{p} = \langle f \rangle$ mit einem Primpolynom $f \in R \setminus \{0\}$,
  (iv) $\mathbf{p} = \{0\}$.

(c) Welches sind die abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(R)$?

Aufgabe 36

Seien R ein Ring und Var, Id auf $X = \mathrm{Spec_m}(R)$ bezogen.

(a) Zeigen Sie, daß für jedes Ideal $\mathbf{a} \trianglelefteq R$ gilt

$$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(\mathbf{a})) = \{a \in R : \forall b \in R : \exists c \in R : (1 + ab)c - 1 \in \mathbf{a}\} \geq \sqrt{\mathbf{a}}$$

(b) Bestimmen Sie ein R und $\mathbf{a} \trianglelefteq R$, für das $\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(\mathbf{a})) \neq \sqrt{\mathbf{a}}$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 5.7.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.