Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 21.6.1991

Algebra II — Übungsblatt 7

Aufgabe 32

Seien X_1, X_2 R-Gitter in einem endlich-dimensionalen Quot(R)-Vektorraum. Zeigen Sie, daß auch $X_1 \cap X_2$ ein solches Gitter ist.

Aufgabe 33

(Eine alternative Definition von $\chi(X_1, X_2)$ im Fall $R = \mathbb{Z}$)
Sei X ein $\mathbb{Z}$-Gitter im $\mathbb{R}^n$, d.h. X ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n mit $X \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Für eine $\mathbb{Z}$-Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von X sei $d(X) := \operatorname{vol}([0,1) \cdot b_1 + \cdots + [0,1) \cdot b_n)$ das n-dimensionale Volumen des von $b_1, \ldots, b_n$ aufgespannten Parallelepipeds im $\mathbb{R}^n$, genannt *Diskriminante* von X.
Zeigen Sie:

(a) $d(X)$ ist wohldefiniert und > 0.

* (b) Sind X_1, X_2 $\mathbb{Z}$-Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit $X_1 \subset X_2$, so ist $\#\left(X_2 / X_1 \right) = \dfrac{d(X_1)}{d(X_2)}$.

(c) Sind X_1, X_2 $\mathbb{Z}$-Gitter im $\mathbb{R}^n$ und $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(X_1) = X_2$, so ist $\dfrac{d(X_1)}{d(X_2)} = \dfrac{1}{|\det \varphi|}$.

(d) Für jeden $\mathbb{Z}$-Modul M endlicher Länge gilt $\chi_{\mathbb{Z}}(M) = \#M < \infty$.

(e) Sind X_1, X_2 $\mathbb{Z}$-Gitter im $\mathbb{R}^n$, so gilt $\chi_{\mathbb{Z}}(X_1, X_2) = \dfrac{d(X_2)}{d(X_1)}$.

Aufgabe 34

Sei $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $L = K(\theta)$ mit $f(\theta) = \theta^3 - 3\theta + 1 = 0$ und S der Ring der über R ganzen Elemente von L. Bestimmen Sie

(a) den Zerfällungskörper von f über K,

(b) $\operatorname{Spur}_{L/K}(x)$ und $N_{L/K}(x)$ eines beliebigen Elements $x = a + b\theta + c\theta^2$ $(a, b, c \in K)$ von L,

(c) zu $V := R \cdot 1 \oplus R \cdot \theta \oplus R \cdot \theta^2$ eine R-Basis von V^* sowie die Differente ,

(d) eine R-Basis von S sowie die Differente ,

(e) für alle Primideale p von R: alle Primideale $\mathcal{P}$ von S mit $\mathcal{P} \mid \mathrm{p}$ sowie jeweils $e_{\mathcal{P}|\mathrm{p}}$ und $f_{\mathcal{P}|\mathrm{p}}$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 28.6.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.