Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 7.6.1991

Algebra II — Übungsblatt 6

Aufgabe 26

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $X, Y \subset k^n$ algebraische Mengen. Man setze $\dim X := \dim I(X)$ (Dimension des Verschwindungsideals von X). Zeigen Sie, daß aus $X \subset Y$ folgt $\dim X \leq \dim Y$.

Aufgabe 27

R ganzabgeschlossen $\Rightarrow$ $R[X_1, \ldots, X_n]$ ganzabgeschlossen.

Aufgabe 28

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.
Ein Satz der Vorlesung besagt: R ist ein diskret bewerteter Ring genau dann, wenn die folgenden Aussagen gelten:

(1) R noethersch,
(2) R lokaler Ring, mit maximalem Ideal $\mathbf{m}$,
(3) $\mathbf{m}$ ist Hauptideal: $\mathbf{m} = \pi \cdot R$, und
(4) π ist nicht nilpotent.

Geben Sie je ein R an, für den

(a) $\neg(1) \wedge (2)$,
(b) $(1) \wedge \neg(2)$,
(c) $(1) \wedge (2) \wedge \neg(3)$,
(d) $(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge \neg(4)$,
(e) $(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)$

gilt.

Aufgabe 29

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\nu : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften

(i) $\nu(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$,
(ii) $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$,
(iii) $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$.

Zeigen Sie:

(a) $\nu(x + y) = \min(\nu(x), \nu(y))$, falls $\nu(x) \neq \nu(y)$.
(b) R Integritätsring.
(c) ν läßt sich eindeutig zu einem $\widetilde{\nu} : \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ fortsetzen, für das (i), (ii), (iii) gelten.
(d) R ist ein diskret bewerteter Ring, mit maximalem Ideal $\mathbf{m} = \{x \in R : \nu(x) > 0\}$.

Aufgabe 30

Sei R ein diskret bewerteter Ring. Zeigen Sie: Die Ideale von R sind genau:

- (in der Sichtweise des lokalen Rings) $\{0\}$ und $\mathbf{m}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- (in der Sichtweise der diskreten Bewertung) $\{0\}$ und $\{x \in R : \nu(x) \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 31

Sei R ein Dedekindring. Zeigen Sie: Die Idealklassengruppe $\mathcal{I}(R)/\mathcal{H}(R)$ ist genau dann die Einsgruppe, wenn R ein Hauptidealring ist.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 14.6.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.