Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 17.5.1991

Algebra II — Übungsblatt 4

Aufgabe 17

Welche der folgenden Ideale sind Primärideale bzw. Primideale?

(a) $\langle 2\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 6\rangle$ in $\mathbb{Z}$,

(b) $\langle X\rangle$, $\langle X,Y\rangle$, $\langle X^2,Y\rangle$, $\left\langle X^2,Y^2,(Y+1)^2\right\rangle$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Aufgabe 18

Zeigen Sie:

(a) $\langle 4,X\rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$ ist primär, aber nicht Potenz eines Primideals.

(b) $R=\mathbb{Z}\left[2X,X^2,X^3\right]$ ist noethersch, $\mathbf{p}=\left\langle 2X,X^2\right\rangle \trianglelefteq R$ ein Primideal, $\mathbf{p}^2$ aber kein Primärideal.

Aufgabe 19

(a) Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring, so ist für jedes $N \leq M$ die Primärzerlegung von N bis auf Permutation eindeutig bestimmt.

(b) Geben Sie für $\langle 4,2X\rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$ zwei verschiedene reduzierte Primärzerlegungen an.

Aufgabe 20

Geben Sie eine reduzierte Primärzerlegung, mit assoziierten Primidealen, von

$$\left\langle X^2,XY,XZ,YZ\right\rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[X,Y,Z]$$

an.

Aufgabe 21

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $M \in {}_R\mathcal{M}$ und $N \leq M$. Zeigen Sie: N ist genau dann primär, wenn $\#\mathrm{Ass}\left({}^{M}/{}_{N}\right)=1$. In diesem Fall ist $\mathrm{Ass}\left({}^{M}/{}_{N}\right)=\{\mathbf{p}\}$, wobei $\mathbf{p}$ das zu N in M assoziierte Primideal ist.

Aufgabe 22

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $M \in {}_R\mathcal{M}$, $N \leq M$.
N habe eine reduzierte Primärzerlegung $N=Q_1\cap\ldots\cap Q_r$; dabei sei jeweils $\mathbf{p}_i$ das zu Q_i assoziierte Primideal. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Ass}\left({}^{M}/{}_{N}\right)=\{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_r\}$,

(b) $\mathrm{Ass}\left({}^{M}/{}_{(Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k})}\right)=\{\mathbf{p}_{i_1},\ldots,\mathbf{p}_{i_k}\}$,

(c) $\mathrm{Ass}\left({}^{(Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k})}/{}_{N}\right)=\{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_r\}\setminus\{\mathbf{p}_{i_1},\ldots,\mathbf{p}_{i_k}\}$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 24.5.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.