Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 3.5.1991

Algebra II — Übungsblatt 3

Aufgabe 11

Sei F ein additiver kovarianter Funktor von ${}_R\mathcal{M}$ nach ${}_S\mathcal{M}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Definitionen für F äquivalent sind:

(a) für Linksexaktheit:

(i) Aus $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ exakt (in ${}_R\mathcal{M}$) folgt $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$ exakt (in ${}_S\mathcal{M}$).

(ii) Aus $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_R\mathcal{M}$) folgt $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$ exakt (in ${}_S\mathcal{M}$).

(b) für Rechtsexaktheit:

(i) Aus $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_R\mathcal{M}$) folgt $FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_S\mathcal{M}$).

(ii) Aus $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_R\mathcal{M}$) folgt $FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_S\mathcal{M}$).

(c) für Exaktheit:

(i) F linksexakt und rechtsexakt.

(ii) Aus $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_R\mathcal{M}$) folgt $0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0$ exakt (in ${}_S\mathcal{M}$).

Hinweis: Vielleicht helfen Ihnen folgende Hilfsbehauptungen:

(a) F linksexakt, $f : A \to B$ injektiv $\Rightarrow$ $Ff : FA \to FB$ injektiv.

(b) F rechtsexakt, $f : A \to B$ surjektiv $\Rightarrow$ $Ff : FA \to FB$ surjektiv.

Aufgabe 12

Ist $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ eine beliebige direkte Summe von R-Rechtsmoduln, so gilt:

M flach $\Leftrightarrow$ alle M_i flach.

M treu-flach $\Leftrightarrow$ alle M_i flach und mindestens ein M_i treu-flach.

Aufgabe 13

Seien R ein kommutativer Ring mit 1, $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen (d.h. $1 \in S$, $S \cdot S \subset S$) und M ein R-Modul. Zeigen Sie:

(a) $M_1 \leq M \;\Rightarrow\; S^{-1}M_1 \leq S^{-1}M$ und $S^{-1}\left(M/M_1\right) \cong S^{-1}M / S^{-1}M_1$.

(b) $S^{-1}(M_1 + M_2) = S^{-1}M_1 + S^{-1}M_2$ für $M_1, M_2 \leq M$.

(c) $S^{-1}(M_1 \cap M_2) = S^{-1}M_1 \cap S^{-1}M_2$ für $M_1, M_2 \leq M$.

Aufgabe 14

Sei R ein Hauptidealring (z.B. $R = \mathbb{Z}$). Zeigen Sie, daß R hermitesch ist, d.h.

$$\forall a_1, \dots, a_n \in R \text{ mit } a_1R + \cdots + a_nR = R \;\; \exists \big((b_{ij})\big)_{\substack{i=2,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in R^{(n-1)\times n} \text{ mit } \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Aufgabe 15

Sei R ein LA-Ring. Kann man die Entscheidung, ob ein gegebenes Polynom $\in R[X]$ irreduzibel ist, allein mit den für LA-Ringe charakteristischen Operationen algorithmisch durchführen?

Aufgabe 16

Sei R der noethersche Ring $\mathbb{Z}[T]$.

(a) Hat das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} T+2 & T+1 \\ T+6 & T+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung über R?

(b) Bestimmen Sie ein endliches R-Erzeugendensystem von
$\big\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (3T+1)\cdot x_1 + (2T+1)\cdot x_2 + T^2 \cdot x_3 = 0\big\}$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 10.5.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.