Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 26.4.1991

Algebra II — Übungsblatt 2

Aufgabe 6

Bestimmen Sie einen zu M isomorphen $\mathbb{Z}$-Modul, den Sie bitte ohne „$\otimes$“ schreiben. Dabei sei M

(a) $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{C}$
(b) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \otimes \mathbb{C}$
(c) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right]$
(d) $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right]$
(e) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$
(f) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$
(g) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right]$
(h) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right]$
(i) $\mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[Y]$
(j) $\mathbb{Z}[\![X]\!] \otimes \mathbb{Z}[Y]$

Aufgabe 7

Sei R ein Ring und M ein fester R-Linksmodul. Zeigen Sie:

(a) Durch
$$F : \left\{ \begin{array}{l} A \mapsto \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(M, A) \\ (f : A \to B) \mapsto (\varphi \mapsto f \circ \varphi) \end{array} \right\}$$
ist ein Funktor von $_R\mathcal{M}$ in $_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ gegeben.
(b) F ist linksexakt.
(c) F ist rechtsexakt $\Leftrightarrow$ M ist projektiv.
(d) Im Fall $M = R$, R Ring mit 1, ist F zum Vergißfunktor von $_R\mathcal{M}$ nach $_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ natürlich isomorph.

Aufgabe 8

(a) Sind M_α $(\alpha \in I)$ R-Linksmoduln, so ist $M := \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ genau dann injektiv (d.h. ein injektiver R-Modul), wenn alle M_α injektiv sind.
(b) $M \in {_R\mathcal{M}}$ ist genau dann injektiv, wenn jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ zerfällt.
(c) Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist genau dann injektiv, wenn $\forall a \in M : \forall n \in \mathbb{N} : \exists b \in M : a = n \cdot b$.
(d) Der einzige gleichzeitig projektive und injektive $\mathbb{Z}$-Modul ist der Nullmodul.

Aufgabe 9

Als $\mathbb{Z}$-Moduln sind

(a) $\mathbb{Z}$ projektiv,
(b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nicht projektiv,
(c) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht injektiv,
(d) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv.

Aufgabe 10

Können Sie zum $\mathbb{Z}$-Modul M eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit freien $\mathbb{Z}$-Moduln M_1 und M_2 bestimmen?

(a) $M = \mathbb{Z}[X]$,
(b) $M = \mathbb{F}_2[X]$,
(c) $M = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$,
(d) $M = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$,
(e) $M = \mathbb{Q}[X]$.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 3.5.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.