Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 22.4.1991

Algebra II — Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul.

(a) Sei M_1 ein Unter-R-Rechtsmodul von M und N_1 ein Unter-R-Linksmodul von N, mit Einbettungen $i_1 : M_1 \hookrightarrow M$ und $i_2 : N_1 \hookrightarrow N$.

(i) Dann ist $\langle m \otimes n : m \in M_1, n \in N_1 \rangle = \mathrm{Bild}\,(i_1 \otimes i_2)$ ein Unter-$\mathbb{Z}$-Modul von $M \underset{R}{\otimes} N$, und es gilt $M/M_1 \underset{R}{\otimes} N/N_1 \cong M \underset{R}{\otimes} N / \mathrm{Bild}\,(i_1 \otimes i_2)$

(ii) Zeigen Sie, daß die Aussage „$\mathrm{Bild}\,(i_1 \otimes i_2)$ ist zu $M_1 \otimes N_1$ isomorph“ falsch ist, jedoch gültig wird, wenn man die Existenz eines $\pi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_R}(M, M_1)$ mit $\pi_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{M_1}$ und eines $\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(N, N_1)$ mit $\pi_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{N_1}$ voraussetzt.

(b) Ist M_1 ein Unter-R-Rechtsmodul von M, mit Einbettung $i : M_1 \hookrightarrow M$ und einem Homomorphismus $\pi : M \to M_1$ mit $\pi \circ i = \mathrm{id}_{M_1}$, so ist

$$\left(M/M_1\right) \underset{R}{\otimes} N \cong \left(M \underset{R}{\otimes} N\right) / \left(M_1 \underset{R}{\otimes} N\right)$$

(c) Ist $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ eine beliebige direkte Summe von R-Rechtsmoduln, so ist

$$M \underset{R}{\otimes} N \cong \bigoplus_{i \in I} \left(M_i \underset{R}{\otimes} N\right)$$

Aufgabe 2

Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und A, B Ideale in R.

(a) Dann ist $R/A \underset{R}{\otimes} R/B \cong R/(A+B)$.

(b) Was können Sie über $A \underset{R}{\otimes} B$ aussagen?

Aufgabe 3

Seien K ein Körper, V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, $\psi \in \mathrm{End}_K(W)$. Zeigen Sie, daß das charakteristische Polynom $p_{\varphi \underset{K}{\otimes} \psi}$ von $\varphi \underset{K}{\otimes} \psi \in \mathrm{End}_K\left(V \underset{K}{\otimes} W\right)$ nur von von den charakteristischen Polynomen p_φ und p_ψ abhängt. In welcher Weise?

Aufgabe 4

Definition: Ein Morphismus $f : A \to B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g : B \to A$ in $\mathcal{C}$ gibt mit $gf = \mathbf{1}_A$ und $fg = \mathbf{1}_B$.
Zeigen Sie:

(a) Innerhalb der Objekte von $\mathcal{C}$ ist die so definierte Isomorphie eine Äquivalenzrelation.
(b) Jeder Isomorphismus ist Mono und Epi. (Die Umkehrung gilt nicht!)

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.
Definition: $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ heißt *Anfangsobjekt* von $\mathcal{C}$, wenn für alle $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ genau einelementig ist. $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ heißt *Endobjekt* von $\mathcal{C}$, wenn für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ genau einelementig ist.

(a) Zeigen Sie: Je zwei Anfangsobjekte von $\mathcal{C}$ sind isomorph. Je zwei Endobjekte von $\mathcal{C}$ sind isomorph.
(b) Bestimmen Sie – sofern vorhanden – Anfangs- und Endobjekt in den Kategorien

    Set (Mengen, Abbildungen),
    ${}_R\mathcal{M}$ (R-Linksmoduln),
    Ring (Ringe mit 1, Ringhomomorphismen).

Abgabe: Bis spätestens Freitag, 26.4.1991, 9.40 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im S 34.