Aufgabe 48 (6=1+2+1+2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s} : \text{alle } a_n \in R\right\}$ sei der Ring der *formalen Dirichletreihen* (aus Aufgabe 46: $R[[S]]$ mit $S = (\mathbb{N}, \cdot)$ und $n^{-s} := \delta(n)$).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s}$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_1 \in R^{\times}$.

(b) Definiert man die *Möbiusfunktion* $(\mu(n))_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot n^{-s}\right)^{-1}$, so gilt

(i) Hat n die Primfaktorzerlegung $n = {p_1}^{m_1} \cdots {p_s}^{m_s}$ (alle p_i paarweise verschiedene Primzahlen, alle $m_i > 0$), so ist

$$\mu(n) = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^s & \text{falls alle } m_i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\}$$

(ii) $\mu(m \cdot n) = \left\{\begin{array}{ll} \mu(m) \cdot \mu(n) & \text{falls } \mathrm{ggT}(m,n) = 1 \\ 0 & \text{falls } \mathrm{ggT}(m,n) \neq 1 \end{array}\right\}$.

(c) Für zwei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R sind äquivalent:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : g(n) = \sum_{m \mid n} f(m)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \sum_{m \mid n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \cdot g(m)$

(*Möbiussche Umkehrformel*)

(d) Für $a \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \mid \sum_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ d \mid n}} \mu(d) \cdot a^{n/d}$.

*