Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 12.12.1990

Algebra I — Übungsblatt 9

Aufgabe 44 (5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n := Z_2 \underset{\varphi}{\rtimes} Z_n$ (mit $Z_2 = \langle s \rangle$, $Z_n = \langle d \rangle$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} Z_2 \to \mathrm{Aut}(Z_n) \\ 1 \mapsto \mathrm{id} \\ s \mapsto \bigl(x \mapsto x^{-1}\bigr) \end{array} \right\}$) die *Diedergruppe*.

Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 3$ ist die Symmetriegruppe eines ebenen regelmäßigen n-Ecks (d.h. die Menge der räumlichen Bewegungen, die das n-Eck invariant lassen) zur D_n isomorph.

(b) Jedes Element der D_n läßt sich als $s^i \cdot d^j$ $(0 \leq i < 2,\ 0 \leq j < n)$ schreiben, und es gilt $s^2 = 1$, $d^n = 1$, $dsd = s$.

(c) D_n ist zur (abstrakten) Gruppe $\bigl\langle \sigma, \delta \mid \sigma^2 = 1, \delta^n = 1, \delta\sigma\delta = \sigma \bigr\rangle$ isomorph.

(d) Bestimmen Sie alle Untergruppen der D_n.

(e) $D_3 \cong S_3$.

Aufgabe 45 (2 Punkte)

Welche Ordnung hat die Gruppe $\bigl\langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = 1 \bigr\rangle$?

Aufgabe 46 (5 Punkte)

Sei R ein Ring (mit 1) und S ein Monoid, das der Endlichkeitsbedingung

$$\forall s \in S : \#\left\{(s_1, s_2) \in S \times S : s_1 \cdot s_2 = s\right\} < \infty$$

genüge. Zeigen Sie:

(a) $R[[S]] := \{f : S \to R\}$ ist mit den Verknüpfungen

$$f + g : (s \mapsto f(s) + g(s))$$

und

$$f \cdot g : \left(s \mapsto \sum_{s = s_1 \cdot s_2} f(s_1) \cdot g(s_2) \right)$$

ein Ring mit 1. $R[[S]]$ heißt *Ring der formalen Potenzreihen* von S über R.

(b) Definiert man Konvergenz auf $R[[S]]$ durch

$f_n \to f$ für $n \to \infty$ $:\Longleftrightarrow$
für alle endlichen Teilmengen $S_0 \subseteq S$ $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$: $\forall s \in S_0$: $f_n(s) = f(s)$,

so sind $+$ und $\cdot$: $R[[S]] \times R[[S]] \to R[[S]]$ stetig.

(c) Ist $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von $R[[S]]$ mit der Eigenschaft $\forall s \in S : \#\{i \in I : f_i(s) \neq 0\} < \infty$ (so eine Familie heißt *summierbar*), so kann man $\sum_{i \in I} f_i \in R[[S]]$ definieren.

Es gilt die Rechenregel

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} f_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{i,j}$$

sobald der erste der drei Ausrücke definiert ist.

(d) $\delta : \left\{ \begin{array}{l} S \to R[[S]] \\ s \mapsto \delta(s) : \left\{ \begin{array}{ll} s \mapsto 1 & \\ t \mapsto 0 & \text{für } t \neq s \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ ist ein Monoidhomomorphismus $\delta : (S, \cdot) \to (R[[S]], \cdot)$. Jedes $f \in R[[S]]$ läßt sich eindeutig darstellen als $f = \sum_{s \in S} a_s \cdot \delta(s)$, alle $a_s \in R$.

Aufgabe 47 $(10 = 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 + 2$ Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $R[[X]]$ sei der Ring der *formalen Potenzreihen* in einer Variablen (Aufgabe 46 mit $S = (\mathbb{N}_0, +)$ und $X := \delta(1)$).

(a) Für $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sei der *Untergrad* $\omega(f)$ definiert durch

$$\omega(f) = \left\{ \begin{matrix} \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\} & \text{für } f \neq 0 \\ \infty & \text{für } f = 0 \end{matrix} \right\}$$

Zeigen Sie:

(i) $\omega(f) = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X^n \mid f\}$.

(ii) $\omega(f+g) \geq \min(\omega(f), \omega(g))$; falls $\omega(f) \neq \omega(g)$, sogar $\omega(f+g) = \min(\omega(f), \omega(g))$.

(iii) $\omega(f \cdot g) \geq \omega(f) + \omega(g)$. Wann gilt $\omega(f \cdot g) = \omega(f) + \omega(g)$?

(b) Ist R ein Integritätsring, so auch $R[[X]]$.

(c) $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in R[[X]]^\times \iff a_0 \in R^\times$.

In (d) bis (g) sei R ein Körper.

(d) $R[[X]]$ ist ein Hauptidealring.

(e) $R[[X]] \oplus \bigoplus_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n<0}} R \cdot X^n = \left\{ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n : n_0 \in \mathbb{Z}, \text{alle } a_n \in R \right\}$ ist ein Ring, der Ring der *formalen Laurentreihen*. Er ist isomorph zu $R((X)) := \mathrm{Quot}\,(R[[X]])$.

* (f) $\left\{ \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{m,n} X^m Y^n : m_0, n_0 \in \mathbb{Z}, \text{alle } a_{m,n} \in R \right\}$ ist ein Ring, aber nur eine echte Teilmenge von $R((X,Y)) := \mathrm{Quot}\,(R[[X,Y]])$.

(g) Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) X^n \in R[[X]]$. Die Koeffizienten $a(n)$ genügen genau dann einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten

$$a(n+r) = c_{r-1} \cdot a(n+r-1) + \cdots + c_0 \cdot a(n) \quad \forall n \geq n_0$$

($r \in \mathbb{N}_0$, $c_{r-1}, \ldots, c_0 \in R$), wenn f eine „rationale Funktion“ $f(X) = \dfrac{p(X)}{q(X)}$ mit $p, q \in R[X]$ ist.

* (h) Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) X^n \in R[[X]]$, $\mathbb{Q} \subseteq R$. Genau dann ist $a(n)$ (für alle hinreichend großen n) ein Polynom in n, wenn f von der Form $f(X) = \dfrac{p(X)}{(1-X)^m}$ ($m \in \mathbb{N}_0$, $p \in R[X]$ Polynom) ist.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 18.12.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.