Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 5.12.1990

## Algebra I — Übungsblatt 8

* **Aufgabe 38** (5 Punkte)

(a) Für $i = 1, 2$ sei $G_i = H \underset{\varphi_i}{\rtimes} N$ das semidirekte Produkt einer Gruppe $H$ mit einer Gruppe $N$ zum Homomorphismus $\varphi_i : H \to \mathrm{Aut}(N)$. Es existiere ein $\rho \in \mathrm{Aut}(N)$ mit $\varphi_2 = \mathrm{inn}_\rho \circ \varphi_1$ (Bezeichnung siehe Aufgabe 31). Zeigen Sie, daß dann $G_1 \cong G_2$ ist.

Sei $V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$ die *Kleinsche Vierergruppe*. Zeigen Sie, daß es

(b) höchstens drei

(c) mindestens drei

Isomorphieklassen von semidirekten Produkten $S_3 \rtimes V_4$ gibt.

**Aufgabe 39** (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung $44$.

**Aufgabe 40** (2 Punkte)

Sei $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Für eine endliche Gruppe $G$ sind äquivalent:
   (i) $\#G$ ist eine $p$-Potenz.
   (ii) $\forall \sigma \in G : \exists k \in \mathbb{N}_0 : \sigma^{p^k} = 1$.
   So eine Gruppe heißt *$p$-Gruppe*.

(b) Für eine endliche Gruppe $G$ und eine Untergruppe $H \leq G$ sind äquivalent:
   (i) $H$ ist eine $p$-Sylowgruppe von $G$ (d.h. $\#H$ ist die maximale $p$-Potenz, die $\#G$ teilt).
   (ii) $H$ ist eine maximale $p$-Gruppe in $G$ (d.h. $H$ ist eine $p$-Gruppe, und es gibt keine $p$-Gruppe $\widetilde{H}$ mit $H < \widetilde{H} \leq G$).

**Aufgabe 41** (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Ist $G = G_1 \times G_2$ ein direktes Produkt von endlichen Gruppen $G_1$ und $G_2$, so ist jede $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ von der Gestalt $P = P_1 \times P_2$, wobei $P_1$ eine $p$-Sylowgruppe von $G_1$ und $P_2$ eine $p$-Sylowgruppe von $G_2$ ist.

* (b) Ist $G = H \rtimes N$ ein semidirektes Produkt von endlichen Gruppen $H$ und $N$, so ist jede $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ von der Gestalt $P = \sigma P_H \sigma^{-1} \rtimes P_N$, wobei $\sigma \in N$, $P_H$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$ mit $\sigma P_H \sigma^{-1} \leq P$ und $P_N$ eine $p$-Sylowgruppe von $N$ mit $P_N \trianglelefteq P$ ist.

**Aufgabe 42** (4=2+2 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Darstellungen der Gruppe $S_4$ durch Erzeugende und definierende Relationen her:

(a) $S_4 \cong \left\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \mid {\tau_1}^2 = {\tau_2}^2 = {\tau_3}^2 = (\tau_1\tau_2)^3 = (\tau_2\tau_3)^3 = (\tau_1\tau_3)^2 = 1 \right\rangle$.

(b) $S_4 \cong \left\langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = (\sigma\tau)^3 = 1 \right\rangle$.

**Aufgabe 43** (7=3+4 Punkte)

Sei $R$ ein Ring mit $1$. Zeigen Sie die Existenz und die Eigenschaften des Produkts und Koprodukts von $R$-(Links-)Moduln (hier *direktes Produkt* bzw. *direkte Summe* genannt):

(a) Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln, so heißt ein $R$-Modul $M$, mit $R$-Modul-Homomorphismen $\gamma_i : M \to M_i$ $(i \in I)$, der die universelle Abbildungseigenschaft

für alle $R$-Moduln $N$
für alle Systeme $(\eta_i)_{i\in I}$ von $R$-Modul-Homomorphismen $\eta_i : N \to M_i$
existiert genau ein $R$-Modul-Homomorphismus $\varphi : N \to M$ mit $\forall i \in I : \gamma_i \circ \varphi = \eta_i$

erfüllt, *direktes Produkt* der $M_i$: $M = \prod_{i\in I} M_i$.

Zeigen Sie:

(i) Ist $(M, (\gamma_i))$ ein direktes Produkt der $M_i$, so sind die $\gamma_i$ surjektiv, und $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Kern}(\gamma_i) = \{0\}$.

(ii) Sind $(M, (\gamma_i))$ und $\left(\widetilde{M}, (\widetilde{\gamma}_i)\right)$ direkte Produkte der $M_i$, so gibt es einen $R$-Modul-Isomorphismus $\Phi : M \to \widetilde{M}$ mit $\forall i \in I : \widetilde{\gamma}_i \circ \Phi = \gamma_i$.

(iii) Es existiert stets ein direktes Produkt der $M_i$.

(b) Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln, so heißt ein $R$-Modul $M$, mit $R$-Modul-Homomorphismen $\gamma_i : M_i \to M$ $(i \in I)$, der die universelle Abbildungseigenschaft

für alle $R$-Moduln $N$
für alle Systeme $(\eta_i)_{i\in I}$ von $R$-Modul-Homomorphismen $\eta_i : M_i \to N$
existiert genau ein $R$-Modul-Homomorphismus $\varphi : M \to N$ mit $\forall i \in I : \varphi \circ \gamma_i = \eta_i$

erfüllt, *direkte Summe* der $M_i$: $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Zeigen Sie:

(i) Ist $(M, (\gamma_i))$ eine direkte Summe der $M_i$, so sind die $\gamma_i$ injektiv, und $\left\langle \bigcup_{i\in I} \mathrm{Bild}(\gamma_i) \right\rangle = M$.

(ii) Sind $(M, (\gamma_i))$ und $\left(\widetilde{M}, (\widetilde{\gamma}_i)\right)$ direkte Summen der $M_i$, so gibt es einen $R$-Modul-Isomorphismus $\Phi : M \to \widetilde{M}$ mit $\forall i \in I : \Phi \circ \gamma_i = \widetilde{\gamma}_i$.

(iii) Es existiert stets eine direkte Summe der $M_i$.
(Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Teilmenge von $\prod M_i$.)

(Beachten Sie: Im Fall $R = \mathbb{Z}$ haben Sie das direkte Produkt bzw. die direkte Summe von abelschen Gruppen konstruiert.)

**Abgabe:** Bis spätestens Dienstag, 11.12.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.