Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 20.11.1990

Algebra I — Übungsblatt 6

Aufgabe 27 (8=3+2+1+2 Punkte)

Leiten Sie (aus dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen) den Hauptsatz über die Jordansche Normalform her:

Sei k ein Körper, V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, $A \in \mathrm{End}_k(V)$, $p_A(t) = \det(tI - A)$ das charakteristische Polynom von A, mit der Faktorisierung $p_A(t) = \prod_{i=1}^{m} p_i(t)^{e_i}$ in normierte, in $k[t]$ irreduzible Faktoren $p_i(t)$, alle $e_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Sei $g_i := \operatorname{grad} p_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Dann hat V eine Basis, bezüglich der A die Abbildungsmatrix

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

hat, mit den Jordanblöcken

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i,r_i} \end{pmatrix}$$

bestehend aus den Jordankästchen

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \Lambda_i & & & 0 \\ E & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & E & \Lambda_i \end{pmatrix} \in k^{g_i l_{i,j} \times g_i l_{i,j}}$$

der „Größe“ $l_{i,j} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wobei zu $p_i(t) = t^{g_i} + c_{i,g_i-1}t^{g_i-1} + \cdots + c_{i,0}t^0$

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & -c_{i,0} \\ 1 & \ddots & & & -c_{i,1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -c_{i,g_i-2} \\ & & & 1 & -c_{i,g_i-1} \end{pmatrix} \in k^{g_i \times g_i}$$

die *Begleitmatrix* zu p_i und

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in k^{g_i \times g_i}$$

ist.

(b) Ordnet man bei festem i die Jordankästchen $J_{i,j}$ so, daß $l_{i,1} \geq l_{i,2} \geq \ldots \geq l_{i,r_i}$ gilt, und setzt man $l_{i,j} := 0$ für $j > r_i$, so gilt für die Elementarteiler $d_1, \ldots, d_n \in k[t]$ der Matrix $tI - A \in k[t]^{n\times n}$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}: \quad d_{n+1-j} \approx \prod_{i=1}^{m} p_i(t)^{l_{i,j}}$$

(c) Der Elementarteiler $d_n \in k[t]$ von $tI - A$ ist das Minimalpolynom von A.

(d) Bestimmen Sie von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ die Jordansche Normalform und von $tI - A \in \mathbb{C}[t]^{4\times 4}$ die Elementarteiler.

Aufgabe 28 (2 Punkte)
Sei G eine Gruppe, U, V Normalteiler von G mit $U \subseteq V$. Zeigen Sie: ${}^{V}/{}_{U}$ ist Normalteiler von ${}^{G}/{}_{U}$, und es gilt $\left({}^{G}/{}_{U}\right) / \left({}^{V}/{}_{U}\right) \cong {}^{G}/{}_{V}$.

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und U, V Untergruppen von G. Zeigen Sie:
(a) $U \times V$ operiert auf G vermöge $(u, v) \cdot g := u \cdot g \cdot v^{-1}$.
Sind U und V endlich, so gilt
(b) $\#(U \cdot V) = \dfrac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap V)}$,
* (c) $\forall g \in G : \#(U \cdot g \cdot V) = \dfrac{\#U \cdot \#V}{\#(U \cap gVg^{-1})}$,
(d) $\forall g \in U : \#(U \cap V) = \#(U \cap gVg^{-1})$.

Aufgabe 30 (3 Punkte)
(Hier sei $\Omega = \emptyset$, d.h. wir betrachten beliebige Untergruppen und Normalteiler.)
(a) Geben Sie alle Kompositionsreihen von ${}^{\mathbb{Z}}/{}_{24\mathbb{Z}}$ an.
(b) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Geben Sie eine Kompositionsreihe von ${}^{\mathbb{Z}}/{}_{n\mathbb{Z}}$ an.
(c) Leiten Sie aus dem Satz von Jordan-Hölder die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen her.

Aufgabe 31 (4=1+2+1 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:
(a) Für alle $g \in G$ ist durch

$$\mathrm{inn}_g : \left\{ \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{array} \right\}$$

ein Automorphismus von G gegeben.
(b) $\mathrm{inn} : \left\{ \begin{array}{l} G \to \mathrm{Aut}(G) \\ g \mapsto \mathrm{inn}_g \end{array} \right\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, und $\mathrm{Inn}(G) := \{\mathrm{inn}_g : g \in G\}$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$.
(c) Mit $\Omega = \mathrm{Inn}(G)$ sind die Ω-Untergruppen von G genau die Normalteiler von G.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 27.11.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.