Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 14.11.1990

Algebra I — Übungsblatt 5

Aufgabe 22 (2 Punkte)

Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ ist (als $\mathbb{Z}$-Modul) nicht endlich erzeugbar.

Aufgabe 23 (4=1+1+2 Punkte)

R sei ein kommutativer Ring mit 1.
Für $a \in R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir (*Knuth*-Notation):
$a^{\overline{n}} := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ und $a^{\underline{n}} := a(a-1)\cdots(a-n+1)$.
Zeigen Sie für $a, b \in R$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{\underline{k}} \cdot b^{\underline{n-k}} = (a+b)^{\underline{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{\overline{k}} \cdot b^{\overline{n-k}} = (a+b)^{\overline{n}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (m-a+b)^{\underline{k}} \cdot (n+a-b)^{\underline{n-k}} \cdot (a+k)^{\underline{m+n}} = a^{\underline{m}} \cdot b^{\underline{n}} \cdot (m+n)^{\underline{n}}$.

* **Aufgabe 24** (5=1+2+2 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring, $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$ und $\mathcal{L}(A,b) := \{x \in R^n : Ax = b\}$.
Nach dem Elementarteiler-Satz existieren $P \in \mathrm{GL}_m(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$, so daß
$P \cdot A \cdot Q = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$ eine Diagonalmatrix mit $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_r \neq 0$ ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{L}(A,b) \neq \emptyset \iff$ für $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} := P \cdot b$ gilt $d_1 \mid c_1, \ldots, d_r \mid c_r$ und $c_{r+1} = 0, \ldots, c_m = 0$.

(b) Existiert ein $x_0 \in \mathcal{L}(A,b)$, so gilt $\mathcal{L}(A,b) = x_0 + \mathcal{L}(A,0)$, und die letzten $n-r$ Spalten von Q bilden ein freies Erzeugendensystem von $\mathcal{L}(A,0)$.

(c) Berechnen Sie für $R = \mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{L}(A,b)$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 25 (5=1+2+1+1 Punkte)

M sei ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n (d.h. M habe ein freies Erzeugendensystem aus n Elementen), $n \in \mathbb{N}_0$. N sei ein Untermodul von M. Zeigen Sie:

(a) N ist ebenfalls ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, von einem Rang $m \leq n$.

(b) Ist $m = n$, so gibt es ein freies Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ von M und natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_n > 0$, so daß $(d_1 x_1, \ldots, d_n x_n)$ ein freies Erzeugendensystem von N ist. Ferner ist der Untergruppenindex $(M : N) = d_1 \cdots d_n$.

(c) Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein freies Erzeugendensystem von M, $(y_1, \ldots, y_n)$ ein freies Erzeugendensystem von N, und schreibt man die y_i als $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$, so gilt $(M : N) = |\det((a_{ij}))|$.

(d) Bestimmen Sie den Untergruppenindex $\left(\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right] : \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]\right)$.

* **Aufgabe 26** (4 Punkte)

Sei $(G, +)$ eine endliche abelsche Gruppe, gegeben durch die folgende Verknüpfungstafel:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
b	b	e	f	c	q	i	j	m	d	k	l	g	n	p	h	a
c	c	f	p	n	i	h	e	l	m	q	a	b	g	j	k	d
d	d	c	n	m	f	p	b	k	h	e	q	a	l	g	j	i
e	e	q	i	f	a	d	k	n	c	l	g	j	p	h	m	b
f	f	i	h	p	d	m	q	g	n	a	b	e	j	k	l	c
g	g	j	e	b	k	q	p	d	a	h	m	n	c	f	i	l
h	h	m	l	k	n	g	d	e	j	c	f	i	q	a	b	p
i	i	d	m	h	c	n	a	j	p	b	e	q	k	l	g	f
j	j	k	q	e	l	a	h	c	b	m	n	p	f	i	d	g
k	k	l	a	q	g	b	m	f	e	n	p	h	i	d	c	j
l	l	g	b	a	j	e	n	i	q	p	h	m	d	c	f	k
m	m	n	g	l	p	j	c	q	k	f	i	d	a	b	e	h
n	n	p	j	g	h	k	f	a	l	i	d	c	b	e	q	m
p	p	h	k	j	m	l	i	b	g	d	c	f	e	q	a	n
q	q	a	d	i	b	c	l	p	f	g	j	k	h	m	n	e

Stellen Sie G in der Form $G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ dar. Welchen Elementen von G entsprechen dabei die Erzeuger $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$?
(Sollten Sie die Aufgabe mit dem Computer lösen, so legen Sie bitte Programmlisting und Ausführungsprotokoll bei.)

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 20.11.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.