Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 31.10.1990

Algebra I — Übungsblatt 3

Aufgabe 11 (6=1+2+1+2 Punkte)

R sei ein ZPE-Ring und $\mathbb{P}_R$ ein Vertretersystem der Teilbarkeitsklassen der Primelemente von R.
Zeigen Sie:

(a) Zu $a, b \in R$ existiert ein $\mathrm{ggT}(a,b)$ und ein $\mathrm{kgV}(a,b)$. (Bitte ausführlicher als in der Vorlesung!)

* (b) R ist Hauptidealring $\iff$ $\forall a, b \in R : \exists u, v \in R : \mathrm{ggT}(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$.

(c) Die Primelementzerlegung eines $x \in \mathrm{Quot}\,(R)$

$$x = u \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_R} p^{a_p} \quad (u \in R^\times \text{, alle } a_p \in \mathbb{Z} \text{, fast alle } = 0)$$

(deren Existenz in der Vorlesung gezeigt wurde) ist durch x eindeutig bestimmt.

(d) Für $x, y \in R$ gilt:

(i) $x \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times) \;\Rightarrow\;$ es gibt nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists y \in R : x = y^n$.

(ii) $n \in \mathbb{N},\; n \geq 1,\; x^n \,|\, y^n \;\Rightarrow\; x \,|\, y$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

R sei ein kommutativer Ring und $A \trianglelefteq R$ ein Ideal.
A heißt Primideal, wenn aus $x \cdot y \in A$ folgt $x \in A$ oder $y \in A$.
A heißt maximales Ideal, wenn $A \neq R$ und es kein Ideal $B \trianglelefteq R$ mit $A \overset{\subseteq}{\neq} B \overset{\subseteq}{\neq} R$ gibt.
Zeigen Sie:

(a) A maximales Ideal von $R \;\Rightarrow\; A$ Primideal von R, $A \neq R$.

(b) Ist R Hauptidealring, so gilt die Umkehrung:
A Primideal von R, $A \neq R$, $A \neq \{0\} \;\Rightarrow\; A$ maximales Ideal von R.

(c) A Primideal von $R \iff R/A$ ist nullteilerfrei.

(d) A maximales Ideal von $R \iff R/A$ ist ein Körper.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei R ein Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. $\kappa\colon \begin{Bmatrix} R \to R/I \\ x \mapsto x + I \end{Bmatrix}$ sei die kanonische Surjektion. Zeigen Sie:
Man hat die folgenden Bijektionen zwischen $\mathcal{I}(R)_{\supseteq I} := \{A \trianglelefteq R : I \subseteq A\}$ und $\mathcal{I}(R/I)$:

$$\varphi : \begin{Bmatrix} \mathcal{I}(R)_{\supseteq I} \to \mathcal{I}(R/I) \\ A \mapsto \kappa(A) \end{Bmatrix},$$

$$\psi : \begin{Bmatrix} \mathcal{I}(R/I) \to \mathcal{I}(R)_{\supseteq I} \\ B \mapsto \kappa^{-1}(B) \end{Bmatrix},$$

und es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Aufgabe 14 (2 Punkte)

Sei k ein Körper und $R = k[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Zeigen Sie, daß R kein Hauptidealring ist.
(Hinweis: Betrachten Sie das Ideal $A = \langle X, Y \rangle = X \cdot R + Y \cdot R$.)

* **Aufgabe 15** (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß für $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv 0 \pmod 5$ das Polynom $f(x) = x^5 - x + a$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ mit $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, $q \in R$ und $S = \{1, q, q^2, q^3, \ldots\}$. Zu welchem Ihnen bekannten Ring ist $S^{-1}R$ isomorph? Bestimmen Sie insbesondere die Mächtigkeit von $S^{-1}R$.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 6.11.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.