Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 13.2.1991

Algebra I — 16. und letztes Übungsblatt

Aufgabe 83

Gegeben sei $V := \left\{ \left(\frac{a}{1+a^2+b^2}, \frac{b}{1+a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2}{1+a^2+b^2} \right) : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Finden Sie eine parameterfreie Darstellung von V (z.B. durch Gleichungen in den Koordinaten x, y, z). Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?

Aufgabe 84

Berechnen Sie die p-adische Zifferndarstellung von

(a) $-1 \in \mathbb{Z}_p$,
(b) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}_5$,
(c) $\frac{3}{8} \in \mathbb{Z}_7$,
(d) $-\frac{13}{2} \in \mathbb{Z}_3$,
(e) $-\frac{1}{6} \in \mathbb{Z}_7$,
(f) $\frac{1}{10} \in \mathbb{Z}_{11}$,
(g) $-\frac{9}{16} \in \mathbb{Z}_{13}$,
(h) $\frac{1}{1-p} \in \mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 85

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^m p^n$ konvergiert in $\mathbb{Z}_p$.
(b) Ihr Wert ist eine rationale Zahl.

Aufgabe 86

Sei $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie:

(a) Die Gleichung $x^p - x = 0$ hat in $\mathbb{Z}_p$ genau p Lösungen.
(b) Die Abbildung $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \{x \in \mathbb{Z}_p : x^{p-1} = 1\} \to \mathbb{F}_p{}^{\times} \\ x \mapsto x \pmod{p} \end{array} \right\}$ ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Aufgabe 87

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $f(X) = X^7 - 7X + 3$ in $\mathbb{Z}_3$? Berechnen Sie eine der Nullstellen mit einer Genauigkeit von 3^{-14}.

*** Aufgabe 88**

(a) Ist p eine ungerade Primzahl, so enthält $\mathbb{Q}_p$ die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln und keine anderen Einheitswurzeln.
(b) Sind p und q verschiedene ungerade Primzahlen, so sind die Körper $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_q$ (als Körper) nicht isomorph.

Abgabe: Keine.