Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 6.2.1991

Algebra I — Übungsblatt 15

Aufgabe 77 (3 Punkte)

Konstruieren Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$, so daß der Zerfällungskörper K von f über $\mathbb{Q}$ die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong Z_5$ hat.
(Hinweis: $Z_5 \leq Z_{10}$.)

Aufgabe 78 (3 Punkte)

Leiten Sie die Lösungsformel für die allgemeine Gleichung 3. Grades her (nach *del Ferro* ca. 1510, *Tartaglia* 1535):
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Jede Gleichung

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

über K kann durch Substitution $Y = X + \frac{a}{3}$ auf die Gestalt

$$Y^3 + pY + q = 0$$

gebracht werden. (Wie bestimmen sich p und q aus a, b, c?)
Deren Lösungen sind

$$Y = u + v, \qquad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

wobei die dritten Wurzeln so zu wählen sind, daß $u \cdot v = -\frac{p}{3}$ wird.

Aufgabe 79 (5 Punkte)

Leiten Sie die Lösungsformel für die allgemeine Gleichung 4. Grades her:
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$.

(a) Die Gleichung

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

über K kann durch Substitution $Y = X + \frac{a}{4}$ auf die Gestalt

$$Y^4 + pY^2 + qY + r = 0$$

gebracht werden. Wie bestimmen sich p, q, r aus a, b, c, d?

(b) (Anleitung nach *Ferrari*:) Man kann P, Q, R so wählen, daß die Gleichung als

$$\left(Y^2 + P\right)^2 - (QY + R)^2 = 0$$

geschrieben werden kann. Wie sind P, Q, R zu wählen? (Hinweis: eine kubische Gleichung für P.) Wie drücken sich die Lösungen Y aus P, Q, R aus?

(c) (Anleitung nach *Euler*:) Sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Lösungen (in einem Zerfällungskörper über K) der Gleichung, so genügen $z_1 = -(y_1 + y_2)(y_3 + y_4)$, $z_2 = -(y_1 + y_3)(y_2 + y_4)$, $z_3 = -(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)$ einer Gleichung 3. Grades. Bestimmen Sie diese Gleichung. Wie drücken sich die y_i aus deren Lösungen z_i aus?

Aufgabe 80 (5 Punkte)

Sei R ein Ring mit 1. Zeigen Sie:

(a) Ist M ein noetherscher R-Modul und $\varphi : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus, so ist auch $\varphi(M)$ ein noetherscher R-Modul.

(b) Sei M ein R-Modul und $N \leq M$ ein Unter-R-Modul. Dann gilt:
M noethersch $\iff$ N und ${}^{M}\!/_{N}$ beide noethersch.

(c) Sind $M_1, \ldots, M_n$ noethersche R-Moduln, so auch ihre direkte Summe $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

(d) Ist M ein noetherscher R-Modul und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist auch M^n ein noetherscher R-Modul.

(e) Ist R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist M ein noetherscher R-Modul.

Aufgabe 81 (3 Punkte)

Berechnen Sie (z.B. durch sukzessive Resultantenbildung) alle Lösungen (über $\mathbb{C}$) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2X^2 + 2Y^2 - Z^2 &= 0 \\ YZ - 2X^2 &= 0 \\ XYZ - 2Y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 82 (3 Punkte)

Bestimmen Sie (z.B. mit dem Buchberger-Algorithmus) alle Lösungen (über $\mathbb{C}$) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} X^3 + 2X^2Y + 2Y(Y-2)X + Y^2 - 4 &= 0 \\ X^2 + 2XY + 2Y^2 - 5Y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 12.2.1991, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.