Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 30.1.1991

Algebra I — Übungsblatt 14

Aufgabe 72 (5 Punkte)

Sei K ein Körper, $f_1, \ldots, f_m \in K[X]$ (normierte) Polynome und M der Zerfällungskörper von $f := f_1 \cdots f_m$ über K.

(a) Zu jedem f_i gibt es einen Zwischenkörper L_i ($M \geq L_i \geq K$), so daß L_i Zerfällungskörper von f_i über K ist.

Sei $G := \operatorname{Aut}(M/K)$ und $G_i := \operatorname{Aut}(L_i/K)$ für $i = 1, \ldots, m$.

(b) Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \to G_1 \times \cdots \times G_m$.
(c) Falls $m = 2$, f separabel über K und $L_1 \cap L_2 = K$, ist $G \cong G_1 \times G_2$.
(d) Bestimmen Sie $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_m}\right)/\mathbb{Q}\right)$, wobei $p_1, \ldots, p_m$ paarweise verschiedene Primzahlen seien.

Aufgabe 73 (3 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$, $f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in K[X]$ irreduzibel und M der Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Gal}(M/K) \cong \left\{ \begin{array}{ll} Z_3 & \text{falls die Diskriminante } D(f) \text{ ein Quadrat in } K \text{ ist} \\ S_3 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

Drücken Sie $D(f)$ als Polynom in a, b, c aus.

Aufgabe 74 (5 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und $f(X) = X^4 + pX^2 + q \in K[X]$.

(a) f irreduzibel über $K \iff p^2 - 4q,\ -p + 2\sqrt{q},\ -p - 2\sqrt{q}$ sind keine Quadrate in K.
(b) Ist f irreduzibel über K, so gilt für den Zerfällungskörper M von f über K:

$$\operatorname{Gal}(M/K) \cong \left\{ \begin{array}{ll} V_4 & \text{falls } q \text{ ein Quadrat in } K \text{ ist} \\ Z_4 & \text{falls } q \cdot (p^2 - 4q) \text{ ein Quadrat in } K \text{ ist} \\ D_4 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

* **Aufgabe 75** (4 Punkte)

Gegeben seien drei (nichtentartete) Kreise in der Ebene, von denen keiner einen anderen schneide oder im Innern eines anderen liege. Zeigen Sie:

(a) Man kann mit Zirkel und Lineal einen Greis (:= Kreis oder Gerade) konstruieren, der die drei Kreise berührt.
(b) Es gibt höchstens 8 solche Greise.

Aufgabe 76 (5 Punkte)

* (a) Für vier aufeinanderfolgende Ecken A, B, C, D eines regelmäßigen n-Ecks (in der Ebene) gilt

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

genau dann, wenn $n = 7$.

(b) Das regelmäßige 7-Eck ist dennoch nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Was ist das Minimalpolynom von $2\cos\frac{2\pi}{7}$ über $\mathbb{Q}$?

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 5.2.1991, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.