Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 16.1.1991

Algebra I — Übungsblatt 12

Notation: Ist $L \geq K$ eine Körpererweiterung, so bezeichne $[L:K] = (L/K)$ den Körpergrad.

Aufgabe 60 (4 Punkte)
Sei $L \geq K$ eine Körpererweiterung.

(a) $[L:K] < \infty \;\Rightarrow\; L$ ist algebraisch über K.
Die Umkehrung gilt nicht.

(b) Es gilt $[L:K] < \infty$ genau dann, wenn es endlich viele über K algebraische Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ mit $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gibt.

Aufgabe 61 (4 Punkte)
Sei $L = K(\alpha)$ eine einfach algebraische Erweiterung.

(a) Ist M mit $L \geq M \geq K$ ein Zwischenkörper und $f_{\alpha,M}(X) = c_d X^d + \cdots + c_0 X^0$ das (normierte) Minimalpolynom von α über M, so gilt $M = K(c_d, \ldots, c_0)$.

(b) Die Körpererweiterung L/K hat höchstens $2^{[L:K]-1}$ Zwischenkörper.

Aufgabe 62 (5 Punkte)
Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) Bestimmen Sie $n := [K:\mathbb{Q}]$ und eine $\mathbb{Q}$-Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von K.

(b) Geben Sie zu jedem $\alpha = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in K \setminus \{0\}$ das Inverse $\frac{1}{\alpha}$ in Basisdarstellung an.

(c) Bestimmen Sie Darstellungsmatrix, Norm und Spur (bezüglich $K/\mathbb{Q}$) von $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in K$.

(d) Zeigen Sie: $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

* (e) Wieviele Zwischenkörper L $(K \geq L \geq \mathbb{Q})$ gibt es?

Aufgabe 63 (2 Punkte)
Schreiben Sie in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ die Zahl $\dfrac{1 + 6 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^6}{4 + 2 \cdot \sqrt[5]{2} - \left(\sqrt[5]{2}\right)^2}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \sqrt[5]{2}, \ldots, \left(\sqrt[5]{2}\right)^4$.

Aufgabe 64 (1 Punkte)
Ist K ein Körper, R ein Ring mit 1 und $\varphi : K \to R$ ein Ringhomomorphismus, so ist entweder φ injektiv oder $\varphi = 0$.

* **Aufgabe 65** (5 Punkte)
Sei q eine Primzahlpotenz.

(a) Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ normiert und irreduzibel. Dann gilt:
$f(X) \mid X^{q^n} - X \iff \operatorname{grad}(f) \mid n$

(b) Sei $I_d := \{f \in \mathbb{F}_q[X] : f \text{ normiert, } f \text{ irreduzibel, } \operatorname{grad}(f) = d\}$.
Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$: $X^{q^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{f \in I_d} f(X)$.

(c) Bestimmen Sie $\# I_d$.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 22.1.1991, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.