Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 9.1.1991

Algebra I — Übungsblatt 11

Aufgabe 54 (1 Punkte)

Für die Darstellungen D über $\mathbb{C}$ einer endlichen abelschen Gruppe G gilt:
D irreduzibel $\iff$ D eindimensional.

Aufgabe 55 (2=1+1 Punkte)

Für eine Gruppe G sei $G' := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$ die *Kommutatorgruppe* von G.

(a) G' ist ein Normalteiler von G, und ${}^{G}\!/_{G'}$ ist eine abelsche Gruppe.
(b) Ist G eine endliche Gruppe, so gibt es genau $(G : G')$ Darstellungen $D : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, $C_1, \ldots, C_r$ ihre Konjugationsklassen, jeweils $\tau_i \in C_i$ und $\chi_1, \ldots, \chi_r$ die irreduziblen Charaktere über $\mathbb{C}$ von G.

Für $i = 1, \ldots, r$ seien $c_i := \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}[G]$ und $e_i := \frac{\chi_i(1)}{\#G} \cdot \sum_{j=1}^{r} \chi_i\left(\tau_j{}^{-1}\right) \cdot c_j \in \mathbb{C}[G]$. Zeigen Sie:

(a) Die e_i liegen im Zentrum von $\mathbb{C}[G]$ (d.h. kommutieren mit allen Elementen von $\mathbb{C}[G]$).
(b) Die e_i sind „orthogonale Idempotente“, d.h. $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$ und $e_i{}^2 = e_i$, und es gilt $\sum_{i=1}^{r} e_i = 1$.

Aufgabe 57 (2 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie: g ist genau dann zu g^{-1} konjugiert, wenn für alle irreduziblen Charaktere χ über $\mathbb{C}$ von G gilt $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 58 ($4 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2$ Punkte)

Eine endliche Gruppe G habe die folgende Charaktertafel:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Bestimmen Sie:

(a) $\#G$,
(b) alle $\#C_i$,
(c) $\#G'$.
* (d) Ist G einfach?

Aufgabe 59 (12 = 1+2+2+4+1+2 Punkte)
R sei ein kommutativer Ring mit 1,
$f(X) = a_nX^n + \cdots + a_0X^0 \in R[X]$ und $g(X) = b_mX^m + \cdots + b_0X^0 \in R[X]$ Polynome, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

$$\operatorname{Res}_{n,m}(f,g) := \det \begin{pmatrix} a_n & \cdots & \cdots & a_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_n & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & \cdots & \cdots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & b_m & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ \ddots \\ 0 \end{matrix}}\right\} m \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ \ddots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n \text{ Zeilen} \end{array} \in R$$

heißt *Resultante* von f und g (oft auch als $\operatorname{Res}(f,g)$ oder – wenn man die Variable X hervorheben will – als $\operatorname{Res}_X(f,g)$ bezeichnet).
Zeigen Sie:

(a) Es gibt Polynome $u, v \in R[X]$ mit $\operatorname{grad}(u) < m$ und $\operatorname{grad}(v) < n$ und $\operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = u \cdot f + v \cdot g$, oder $n = m = 0$.

(b) Ist R ein Körper, so sind äquivalent:
  (i) $\operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = 0$.
  (ii) Es gibt Polynome $u, v \in R[X]$, nicht beide $= 0$, mit $\operatorname{grad}(u) < m$ und $\operatorname{grad}(v) < n$ und $u \cdot f = v \cdot g$.
  (iii) f und g haben einen nichtkonstanten Primfaktor gemeinsam, oder $a_n = b_m = 0$, und zusätzlich $\neg(n = m = 0)$.

(c) Haben f und g die Gestalt $f(X) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ und $g(X) = b_m \cdot \prod_{j=1}^{m} (X - \beta_j)$, so gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{n,m}(f,g) &= {a_n}^m \cdot {b_m}^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) \\ &= {a_n}^m \cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \\ &= {b_m}^n \cdot \prod_{j=1}^{m} (-1)^n f(\beta_j) \end{aligned}$$

(d) Es gelten die Rechenregeln
  (i) $\operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = (-1)^{n \cdot m} \cdot \operatorname{Res}_{m,n}(g,f)$
  (ii) $m = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = {b_m}^n$
  (iii) $n = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = {a_n}^m$
  (iv) $\operatorname{Res}_{n,m+1}(f,g) = a_n \cdot \operatorname{Res}_{n,m}(f,g)$
  (v) $\operatorname{Res}_{n+1,m}(f,g) = (-1)^m b_m \cdot \operatorname{Res}_{n,m}(f,g)$
  (vi) $n \geq m,\ h \in R[X],\ \operatorname{grad}(h) \leq n - m \ \Rightarrow\ \operatorname{Res}_{n,m}(f,g) = \operatorname{Res}_{n,m}(f - h \cdot g, g)$
  (vii) $\operatorname{Res}_{n,m_1+m_2}(f, g_1 \cdot g_2) = \operatorname{Res}_{n,m_1}(f, g_1) \cdot \operatorname{Res}_{n,m_2}(f, g_2)$
  (viii) $\operatorname{Res}_{n_1+n_2,m}(f_1 \cdot f_2, g) = \operatorname{Res}_{n_1,m}(f_1, g) \cdot \operatorname{Res}_{n_2,m}(f_2, g)$
* (ix) Ist $h(X) = c_dX^d + \cdots + c_0X^0 \in R[X]$ ein weiteres Polynom, und bezeichnet $f \circ h$ das Polynom $f(h(X))$, so gilt $\operatorname{Res}_{n \cdot d, m \cdot d}(f \circ h, g \circ h) = ({c_d}^{n \cdot m} \cdot \operatorname{Res}_{n,m}(f,g))^d$.

(e) Berechnen Sie für $f(X) = X^2 + pX + q$ und $g(X) = f'(X)$ die Resultante $\operatorname{Res}(f,g)$.

(f) (Konstruktives Rechnen mit algebraischen Zahlen)
Sei L ein Körper (z.B. $\mathbb{C}$) und R ein Unterring (mit 1) von L (z.B. $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$). Sind $\alpha, \beta \in L$ ganzalgebraisch über R, mit $f(\alpha) = 0$, $g(\beta) = 0$ (f, g normierte Polynome $\in R[X]$ vom Grad n bzw. m, so gilt
  (i) für $h(X) := \operatorname{Res}_Y(f(Y), g(X - Y))$: $h(\alpha + \beta) = 0$,
  (ii) für $h(X) := \operatorname{Res}_Y\left(f(Y), Y^m \cdot g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)$: $h(\alpha \cdot \beta) = 0$,
und in beiden Fällen ist h ein normiertes Polynom $\in R[X]$ vom Grad $n \cdot m$.

(Hinweis: Viele der Aussagen brauchen nur für $R = \mathbb{C}$ gezeigt zu werden; ihre Gültigkeit im Fall $R = \mathbb{Z}[A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_m]$ folgt mit dem Koeffizientenvergleichssatz, und dann allgemein durch einen Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{Z}[A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_m] \to R$.)

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 15.1.1991, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.