Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 19.12.1990

Algebra I — Übungsblatt 10

Aufgabe 48 (2 Punkte)
Sei $D : V_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ die reguläre Darstellung der Kleinschen Vierergruppe. Geben Sie alle $D(\sigma)$ $(\sigma \in V_4)$ explizit an.

Aufgabe 49 (3 Punkte)
Es bezeichne $D : Z_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung der zyklischen Gruppe $Z_n = \langle\sigma\rangle$.

(a) D ist durch $D(\sigma)$ bereits eindeutig festgelegt.
(b) Geben Sie für die reguläre Darstellung D die Matrix $D(\sigma)$ explizit an.
(c) Sind $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ n-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, so ist durch $D(\sigma) := \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix}$ eine Darstellung der Z_n gegeben. Unter welcher Bedingung ist diese Darstellung zur regulären Darstellung aus (b) äquivalent?

Aufgabe 50 (3 Punkte)
Geben Sie alle „eindimensionalen“ Darstellungen $D : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$

(a) der zyklischen Gruppe $G = Z_n$,
(b) einer beliebigen endlichen abelschen Gruppe G

an. Wieviele solche Darstellungen gibt es?

Aufgabe 51 (3 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit der Basis $(b_1, \ldots, b_n)$, $\mathrm{char}(K) \nmid n$, G eine Gruppe und D eine Permutationsdarstellung von G bezüglich $(b_1, \ldots, b_n)$. Zeigen Sie, daß $U_1 := K \cdot (b_1 + \cdots + b_n)$ ein $K[G]$-Untermodul von V ist, und bestimmen Sie einen $K[G]$-Untermodul U_2 von V mit $V = U_1 \oplus U_2$ sowie eine K-Basis von U_2.

Aufgabe 52 (3 Punkte)
Zeigen Sie: Die Konjugationsklassen der S_n entsprechen bijektiv den Lösungen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in {\mathbb{N}_0}^n$ der Gleichung $1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \cdots + n \cdot \lambda_n = n$. Dabei hat die $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ entsprechende Konjugationsklasse genau $\dfrac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}$ Elemente.

Aufgabe 53 (6 Punkte)
Bestimmen Sie eine Charaktertafel (Wertetabelle aller Charaktere von irreduziblen Darstellungen über $\mathbb{C}$)

(a) der Z_3,
(b) der S_3,
(c) der A_4,
(d) der S_4.

(Hinweis: Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelationen.)

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 8.1.1991, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.