Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. W. Trinks

Karlsruhe, 17.10.1990

Algebra I — Übungsblatt 1

Für eine Menge M bezeichne $I_M := \{(m,m) \mid m \in M\} \subseteq M \times M$ die Gleichheitsrelation auf M (= Diagonale von M).

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien M, N Mengen und K eine Korrespondenz von M nach N. Zeigen Sie: K ist Graph einer Funktion $f: M \to N$ genau dann, wenn $K^t \circ K \supseteq I_M$ und $K \circ K^t \subseteq I_N$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

$\vdash$ sei eine Relation auf einer Menge M, $\dashv$ die Umkehrrelation ($\dashv = \vdash^t$) und $\vdash\!\dashv := \vdash \cup \dashv$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ sei $\vdash\!\dashv^n := \underbrace{\vdash\!\dashv \circ \cdots \circ \vdash\!\dashv}_{n \text{ mal}}$.

Zeigen Sie, daß $\models\!\mid := I_M \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\vdash\!\dashv^n)$

(a) eine Äquivalenzrelation ist,
(b) die (im Sinne der Teilmengenrelation) kleinste Äquivalenzrelation ist, die $\vdash$ umfaßt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für ein Monoid $(M, \cdot)$ heißt $x \in M$

linksregulär, wenn $\forall y, z \in M : (x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z)$;
rechtsregulär, wenn $\forall y, z \in M : (y \cdot x = z \cdot x \Rightarrow y = z)$.

Finden Sie

(a) ein Monoid M und ein $x \in M$, das weder links- noch rechtsregulär ist,
(b) ein Monoid M und ein $x \in M$, das links-, aber nicht rechtsregulär ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M die Halbgruppe $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$, versehen mit der gewöhnlichen Restklassenmultiplikation. Wieviele Unter-Halbgruppen (gegenüber der Multiplikation abgeschlossene nichtleere Teilmengen) N von M gibt es? (Sollten Sie die Aufgabe mit dem Computer lösen, so legen Sie bitte Programmlisting und Ausführungsprotokoll bei.)

* **Aufgabe 5** (5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M = \mathbb{N}^n$. Auf M sei durch $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) :\Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_n$ eine (Teil-)Ordnung definiert.
Zeigen Sie: Es gibt keine unendlich langen Folgen $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ in M, die $\forall r, s : (r < s \Rightarrow x_r \not\leq x_s)$ erfüllen. D.h. jede solche Folge bricht ab.
(Hinweis: Induktion über n.)

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, 23.10.1990, 11.15 Uhr in den Kasten bei Zi. 308 des Mathematikgebäudes oder in der Übung im Neuen Hörsaal.